

# Obyčejné diferenciální rovnice (NMMA336)

Petr Velička \*

přednášející: doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D. †

LS 2024/25

---

\*petrvel@matfyz.cz

†bart@karlin.mff.cuni.cz

# 1 Lokální existence řešení

Diferenciální rovnice nás doprovází v každé oblasti lidského života. Neexistuje obecná teorie, která by nám umožnila vyřešit všechny diferenciální rovnice najednou. Musíme se proto omezit jen na část rovnic.

**Úmluva 1.1.** V této přednášce budeme studovat systém rovnic

$$x' = f(x, t) \quad (1)$$

za trvalého předpokladu  $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$  otevřená,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  spojitá.

**Definice 1.2.** Buď  $I$  otevřený interval. Funkci  $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazveme *řešením* diferenciální rovnice (1) v  $\Omega$ , jestliže pro všechna  $t \in I$  platí

- (i)  $(x(t), t) \in \Omega$ ,
- (ii) existuje vlastní  $x'(t)$ ,
- (iii)  $x'(t) = f(x(t), t)$ .

Takto definované řešení je nutně spojitě a má spojitou derivaci (je třídy  $C^1$ ), tzv. klasické řešení. Dále si poznamenejme, že platí tzv. princip nalepování: Pokud máme  $x(t)$  řešení na  $(a, t_0)$  a na  $(t_0, b)$ , pak už je řešením na celém  $(a, b)$ . To plyne z toho, že  $x'_-(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} x'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(x(t), t) = f(x(t_0), t_0)$ , přičemž tatáž rovnost platí i pro derivaci zprava.

**Lemma 1.3.** *Nechť  $I$  je otevřený interval,  $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  spojitá splňující  $(x(t), t) \in \Omega$  pro každé  $t \in I$  a nechť  $t_0 \in I$ . Potom je ekvivalentní*

- (i)  $x$  je řešení (1) splňující  $x(t_0) = x_0$ ,
- (ii) pro každé  $t \in I$  platí  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$ .

*Důkaz.* Víme, že platí  $x'(s) = f(x(s), s)$  pro všechna  $s \in I$ , což je spojitá funkce, kterou můžeme zintegrovat na  $[t_0, t]$ . Potom z Newtonova-Leibnizova vzorce máme  $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$ . Tedy  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$ .

Pro důkaz opačné strany si uvědomíme, že pro každé  $t \in I$  je pravá strana diferencovatelná, tedy  $x'(t) = f(x(t), t)$  a po dosazení  $t = t_0$  dostáváme  $x(t_0) = x_0$ .  $\square$

Teď si zadefinujeme několik pojmů, které charakterizují množiny funkcí, které se chovají jistým způsobem podobně nebo stejně.

**Definice 1.4.** Řekneme, že funkce množiny  $M \subset C(K, \mathbb{R}^n)$  jsou

1. *stejně spojitě*, jestliže pro každé  $x \in K$  a každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  (společně pro všechny funkce) takové, že  $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$  pro všechna  $y \in (x - \delta, x + \delta)$  a všechny  $f \in M$ .

2. *stejně omezené*, jestliže existuje  $C > 0$  takové, že  $\|f\| \leq C$  pro všechna  $f \in M$ .

**Věta 1.5** (Arzela-Ascoli). *Nechť funkce  $x_n(t)$  jsou stejně omezené a stejně spojitě na  $[0, T]$ . Potom z nich lze vybrat stejnoměrně konvergující posloupnost. (bez důkazu)*

Následující věta nám říká, že na nějakém okolí libovolného bodu existuje řešení zkoumané diferenciální rovnice.

**Věta 1.6** (Peano). *Nechť  $(x_0, t_0) \in \Omega$ . Pak existuje  $\delta > 0$  a funkce  $x(t) : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , která je řešením (1) a splňuje  $x(t_0) = x_0$ .*

K důkazu této věty budeme potřebovat pomocné lemma:

**Lemma 1.7.** *Pokud  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$  a  $f$  je omezená na  $\Omega$ , pak pro každé  $T > 0$  existuje řešení (1) na  $(t_0 - T, t_0 + T)$  splňující  $x(t_0) = x_0$ .*

*Důkaz.* Řešme “porušenou” úlohu  $P_\lambda: x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \lambda), s)ds$  pro  $t > t_0$  kde dodefinováváme funkci  $x(t) = x_0$  na intervalu  $t \in [t_0 - \lambda, t_0]$ . Na  $I_1 := (t_0, t_0 + \lambda]$  definujeme  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \lambda), s)ds$ . Na  $I_2 := (t_0 + \lambda, t_0 + 2\lambda]$  definujeme  $x(t)$  obdobně a indukci pokračujeme dokud  $t_0 + k\lambda$  nebude větší než  $T$ . Tímto je “porušená” úloha vyřešena na  $[t_0 - \lambda, t_0 + T]$ .

Položme  $\lambda = \frac{1}{n}$  pro  $n = 1, 2, \dots$ . Pišme dále jen  $x_n$  namísto  $x_{1/n}$ , tedy řešení úloh  $P_{\frac{1}{n}}$  tvoří posloupnost funkcí.

Ukážeme, že jsou stejně spojitě a stejně omezené. Stejná omezenost plyne z toho, že  $\|x_n(t)\| = \|x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s)ds\| \leq \|x_0\| + \|\int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s)ds\|$ . Ale funkce  $f$  je omezená, tedy máme  $\|x_n(t)\| \leq \|x_0\| + (T - t_0) \cdot K$ , kde  $K$  je příslušná konstanta omezenosti  $f$ . Stejnou spojitost máme z odhadu  $\|x_n(t) - x_n(r)\| = \|\int_r^t f(x(s - \frac{1}{n}), s)ds\| \leq |t - r| \cdot K$ . V poslední nerovnosti jsme odhadli integrál součinem délky intervalu a konstantou omezenosti funkce  $f$ . Stačí položit  $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ , potom  $\|x_n(t) - x_n(r)\| < \delta K = \varepsilon$ .

Tedy dle Věty 1.5 můžeme z posloupnosti  $x_n$  vybrat stejnoměrně konvergentní podposloupnost  $x_{n_k}$ . Zbývá dokázat, že její limita řeší naši rovnici.

*konec 1. přednášky (21.2.2025)*

Zřejmě pro  $k \rightarrow \infty$  platí  $x_{n_k} \rightarrow x(t)$  a pokud  $\int_{t_0}^t f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s)ds$  konverguje k  $\int_{t_0}^t f(x(s), s)ds$ , máme hotovo. Skutečně,  $\|\int_{t_0}^t f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s), s)ds\| \leq \int_{t_0}^t \|f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s - \frac{1}{n_k}), s)\| + \|f(x(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s), s)\|ds$ .

Jelikož  $f$  je spojitá, musí být stejnoměrně spojitá na kompaktní množině  $[t_0, t_0 + T] \times \overline{B(0, r) \cap \Omega}$ , jinými slovy platí, že pro  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta$  takové, že pro každé dva body  $x, y$  takové, že  $\|x - y\| < \delta$  máme, že  $|f(x, s) - f(y, s)| < \varepsilon$ . Ze stejnoměrné konvergence  $x_{n_k}$  máme, že pro  $\delta > 0$  existuje  $k_0$  takové, že pro všechna  $k \geq k_0$  platí  $\|x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}) - x(s - \frac{1}{n_k})\| < \delta$ . Jelikož  $x$  je spojitá, na kompaktním intervalu  $[t_0, t_0 + T]$  je také stejnoměrně spojitá. Potom pro  $\delta > 0$  existuje  $k_1$  takové, že pro všechna  $k \geq k_1$  platí  $\|x(s - \frac{1}{n_k}) - x(s)\| < \delta$ .

Potom pro všechna  $k \geq \max\{k_0, k_1\}$  platí, že náš integrál je menší nebo roven  $\int_{t_0}^t \varepsilon + \varepsilon ds \leq T \cdot 2\varepsilon$ , tedy jsme opravdu našli požadované řešení.

Existence řešení na  $[t_0 - T, t_0]$  se ukáže podobně.  $\square$

*Důkaz Věty 1.6.* Uvažujme dvě (uzavřené) koule kolem bodu  $(x_0, t_0)$  takové, že

$K_1 \subsetneq K_2 \subset \Omega$ . Definujeme  $\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t) & \text{v } K_1, \\ \text{spojitě v } K_2 \setminus K_1, & \text{Tato funkce je} \\ 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus K_2. \end{cases}$

na  $\Omega$  spojitá a omezená.

Z Lemmatu 1.7 máme, že rovnice  $x' = \tilde{f}(x, t)$  má řešení  $x$  splňující počáteční podmínku  $x(t_0) = x_0$ . Nazveme toto řešení  $\tilde{x}$ . Potom ze spojitosti  $\tilde{x}$  existuje  $\delta > 0$  takové, že graf  $\tilde{x}$  na  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  leží v  $K_1$ . Restrikce  $\tilde{x}$  na tento interval nám tedy dává řešení původní rovnice.  $\square$

## 2 Jednoznačnost řešení

V této kapitole se budeme věnovat otázce jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic. V praxi to často požadujeme, například proto, aby nějaká simulace byla deterministická.

**Definice 2.1.** Řekneme, že rovnice (1) má v  $\Omega$  vlastnost *globální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení  $(x, I), (y, J)$  splňující  $x(t_0) = y(t_0)$  pro nějaké  $t_0 \in I \cap J$ , potom  $x(t) = y(t)$  pro všechna  $t \in I \cap J$ .

Řekneme, že rovnice (1) má v  $\Omega$  vlastnost *lokální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení  $(x, I), (y, J)$  splňující  $x(t_0) = y(t_0)$  pro nějaké  $t_0 \in I \cap J$  existuje  $\delta > 0$  takové, že  $x(t) = y(t)$  pro všechna  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ .

**Věta 2.2.** *Rovnice (1) má v  $\Omega$  vlastnost globální jednoznačnosti právě tehdy, když má vlastnost lokální jednoznačnosti.*

*Důkaz.* Implikace směrem doprava je triviální (funkce, které se rovnají na celé množině se nutně musí rovnat i na nějakém okolí zkoumaného bodu).

Pro důkaz opačné implikace necht' máme dvě řešení  $(x, I), (y, J)$  splňující  $x(t_0) = y(t_0) = x_0$  pro nějaké  $t_0 \in I \cap J$ . Bez újmy na obecnosti necht'  $I \cup J = (a, b)$ . Položme  $M = \{t : x(t) = y(t)\}$ . Tato množina je díky předpokladu neprázdná, necht'  $c := \sup M$ .

Pro spor předpokládejme, že  $c < b$ . Potom platí  $x(c) = \lim_{t \rightarrow c^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow c^-} y(t)$ , což se díky spojitosti  $y$  rovná  $y(c)$ . Tedy  $c$  je maximum  $M$ . Ale díky lokální jednoznačnosti existuje okolí bodu  $(x(c), c)$ , na kterém platí  $x = y$ . Tedy  $x(c + \delta) = y(c + \delta)$  pro nějaké  $\delta > 0$ , což je spor s tím, že  $c = \sup M$ .  $\square$

**Definice 2.3.** Funkce  $f$  se nazývá *lokálně lipschitzovská vzhledem k  $x$  v  $\Omega$* , jestliže pro každé  $(x_0, t_0) \in \Omega$  existují  $L$  a  $\delta > 0$  takové, že

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|$$

pro všechna  $(x, t), (y, t) \in U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ .

**Věta 2.4.** *Necht'  $f$  je lokálně lipschitzovská vzhledem k  $x$  v  $\Omega$ . Potom rovnice (1) má v  $\Omega$  vlastnost lokální jednoznačnosti.*

*Důkaz.* Volme  $(x_0, t_0) \in \Omega$  a dvě řešení  $(x, I), (y, J)$  taková, že  $x(t_0) = y(t_0) = x_0$ . Vezmeme  $\delta_1 > 0$  tak, aby  $f$  byla lipschitzovská na  $\delta_1$ -okolí  $(x_0, t_0)$ . Necht'  $\delta \leq \frac{1}{2L}$  je takové, že navíc  $\delta < \delta_1$  a  $t$  takové, aby  $(x(t), t), (y(t), t) \in U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ . Potom platí

$$\|x(t) - y(t)\| = \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds - (x_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds) \right\| \leq$$

$$\left| \int_{t_0}^t \|f(x(s), s) - f(y(s), s)\| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\| ds \right| \leq L \cdot \gamma \cdot \delta \leq \frac{\gamma}{2}$$

pro  $\gamma := \sup \|x(s) - y(s)\|$ . To platí pro všechna  $t$ , tedy  $\gamma = \sup \|x(t) - y(t)\| \leq \frac{\gamma}{2}$ , z čehož plyne  $\gamma = 0$ , což implikuje rovnost  $x(t)$  a  $y(t)$ .  $\square$

Zavedeme značení  $f \in C_x^1(\Omega)$ , jestliže  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  existují a jsou spojité v  $\Omega$  pro každé  $i$ .

**Lemma 2.5.** *Nechť  $f \in C_x^1(\Omega)$ . Potom  $f$  je lokálně lipschitzovská vzhledem k  $x$  v  $\Omega$ .*

*Důkaz.* Mějme  $(x_0, t_0) \in \Omega$ . Nechť  $\delta > 0$  je takové, že množina

$$M = \overline{U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)}$$

je podmnožinou  $\Omega$ . Z kompaktnosti  $M$  máme, že parciální derivace  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  jsou omezené konstantou  $K$ .

Dále mějme dva body  $(x, t), (y, t) \in M$ . Potom

$$\begin{aligned} |f(x, t) - f(y, t)| &= |f(x + 0(y - x), t) - f(x + 1(y - x), t)| = \\ &= |[f(x + s(y - x), t)]_0^1| = \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + s(y - x), t) ds \right|. \end{aligned}$$

Pro derivaci  $f$  platí

$$\frac{d}{ds} f(x + s(y - x), t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + s(y - x), t)(y_i - x_i).$$

Z toho máme, že

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + s(y - x), t) ds \right| &\leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n K |y_i - x_i| ds = \sum_{i=1}^n K \max_i |y_i - x_i| = \\ &= nK \max |y_i - x_i| \leq nK |y - x|, \end{aligned}$$

kde poslední nerovnost plyne z faktu, že  $|y - x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2}$ .

Tedy  $f$  je lokálně lipschitzovská s konstantou  $n \cdot K$ . □

*Rule of thumb (just for fun):* platí  $f$  spojitá  $\Rightarrow$  existuje řešení,  $f \in C^1 \Rightarrow$  řešení je určeno jednoznačně.

*konec 2. přednášky (28.2.2025)*

### 3 Maximální řešení

V této kapitole se budeme věnovat otázce rozšíření řešení na co největší podmnožinu prostoru, v němž toto řešení hledáme. Bez újmy na obecnosti budeme dále předpokládat, že  $f$  je spojitá (ne nutně lipschitzovská) na  $\Omega$  (což znamená, že nutně nemusíme mít jednoznačnost řešení).

**Definice 3.1.** Řešení  $(\hat{x}, \hat{I})$  diferenciální rovnice (1) nazýváme *prodloužením* řešení  $(x, I)$ , jestliže  $\hat{I} \supset I$  a  $\hat{x}(t) = x(t)$  pro každé  $t \in I$ . Řešení  $(x, I)$  se nazve *maximální*, jestliže nemá žádné netriviální  $(\hat{I} \supsetneq I)$  prodloužení.

**Věta 3.2.** Každé řešení rovnice (1) má alespoň jedno maximální prodloužení.

*Důkaz.* Mějme řešení  $(x, I)$  takové, že  $I = (a, b)$ . Budeme induktivně prodloužovat za bod  $b$  (na druhou stranu se to pak udělá analogicky). Položme  $x_0 = x$ ,  $b_0 = b$ ,  $I_0 = I$ . V  $n$ -tém kroku dostaneme řešení  $(x_n, I_n)$ , kde  $I_n = (a, b_n)$ . Dále definujeme  $\omega_n = \sup\{z > b_n; (x_n, I_n) \text{ lze prodloužit na } (a, z)\}$ . Pokud příslušná množina je prázdná, jsme hotovi, neboť řešení již nejde prodloužit, tedy je maximální.

V opačném případě můžeme definovat  $b_{n+1} = \frac{b_n + \omega_n}{2}$  (pokud  $\omega_n < \infty$ ), případně  $b_{n+1} = b_n + 1$ . Tímto postupem získáme rostoucí posloupnost  $b_n$ , která musí mít limitu. Označme tuto limitu  $\beta$ . Dále položíme  $\tilde{I} = (a, \beta)$ ,  $\tilde{x} = x_n(t)$ , pro všechna  $t \in \tilde{I}$  zvolím  $n$  tak, aby  $t \in I_n$ . Na volbě  $n$  nezáleží, neboť na příslušných intervalech jsou funkce  $x_n$  stejné.

Dokážeme, že takto definované řešení  $(\tilde{x}, \tilde{I})$  je maximální. Pro spor budeme předpokládat, že existuje rozšíření na  $(a, \hat{\beta})$  takové, že  $\hat{\beta} > \beta$ . Okamžitě vidíme, že  $\beta < \infty$ . Vezmeme  $n$  takové, aby  $\beta - b_n < \hat{\beta} - \beta$  a  $\beta - b_n < 1$  (existuje díky tomu, že  $b_n$  konvergují k  $\beta$ ). V tom případě  $(x_n, I_n)$  má prodloužení až do  $\hat{\beta}$ , tedy  $\omega_n \geq \hat{\beta}$ . Pak ale (pokud  $\omega_n = \infty$ )  $b_{n+1} = b_n + 1 > \beta$ , máme spor, případně pro  $\omega_n$  konečné máme  $b_{n+1} = \frac{b_n + \omega_n}{2} > \frac{2\beta - \hat{\beta} + \hat{\beta}}{2} = \beta$ , opět jsme došli ke sporu.  $\square$

V případě  $f$  lipschitzovské se důkaz dá výrazně zjednodušit. Budeme uvažovat všechna prodloužení řešení  $x$  (platí jednoznačnost), dostaneme lineárně uspořádanou množinu, potom díky Zornovu lemmatu existuje maximální prvek.

**Věta 3.3 (Picard).** Nechť  $f \in C_x^1(\Omega)$ . Pak pro každé  $(x_0, t_0) \in \Omega$  existuje právě jedno maximální řešení  $x$  diferenciální rovnice (1) v  $\Omega$  splňující  $x(t_0) = x_0$ .

*Důkaz.* Plyne z Peanovy věty (Věta 1.6) a Věty 3.2. Jednoznačnost plyne z rule of thumb v kapitole 2.  $\square$

**Lemma 3.4.** Řešení  $(x, I)$  diferenciální rovnice (1) lze prodloužit za bod  $b$  právě tehdy, když platí všechny

- (i)  $b < \infty$ ;
- (ii) existuje  $\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) =: x_0 \in \mathbb{R}^n$ ;

(iii)  $(x_0, b) \in \Omega$ .

*Důkaz.* Nutnost těchto podmínek plyne triviálně z podstaty prodloužení (cvičení). Dokážeme, že jde o podmínky postačující. Nechť tedy máme  $(x_0, b)$  jako novou počáteční podmínku, dle Peanovy vety existuje řešení  $\hat{x}$  na  $(b - \delta, b + \delta)$  splňující tuto počáteční podmínku. Definujeme  $\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t < b \\ \tilde{x}(t), & t \geq b \end{cases}$ . Potom  $\hat{x}$  je řešení (díky principu nalepování) a navíc prodlužuje  $x$  za bod  $b$ , což jsme chtěli dokázat.  $\square$

Na závěr si uvedeme jednu důležitou větu, která nám poskytne představu o tom, jak vypadají maximální řešení diferenciálních rovnic.

**Věta 3.5** (Opuštění kompaktu). *Nechť  $K \subset \Omega$  je kompaktní, nechť  $(x, I)$  je maximální řešení rovnice (1) splňující  $(x(t_0), t_0) \in K$  pro nějaké  $t_0 \in I$ . Potom existují  $t_1 > t_0 > t_2$  taková, že  $(x(t_1), t_1) \notin K$  a  $(x(t_2), t_2) \notin K$ .*

*Důkaz.* Pro spor budeme předpokládat, že takové  $t_1$  neexistuje, chceme dojít ke sporu s maximalitou řešení. Mějme řešení  $x$  na  $(a, b)$  a  $(x(t), t) \in K$  pro všechna  $t \in [t_0, b)$ . Ukážeme, že toto řešení můžeme prodloužit za  $b$ . Využijeme k tomu Lemma 3.4.

Zřejmě platí  $b < \infty$  (díky kompaktnosti  $K$ ). Dále dokážeme, že existuje  $\lim_{t \rightarrow b^-} x(t)$  pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Mějme  $s, t \in (t_0, b)$ . Dále díky Lagrangeově větě o střední hodnotě máme

$$\|x(s) - x(t)\| \leq \|x'(\xi)\| |s - t| = \|f(x(\xi), \xi)\| |s - t| \leq M |s - t|,$$

kde poslední nerovnost plyne z toho, že funkce  $f$  je omezená na kompaktu  $K$  konstantou  $M$ . Nakonec  $(x_0, b) = \lim_{t \rightarrow b^-} (x(t), t)$ , tedy z uzavřenosti  $K$  máme, že  $(x_0, b) \in K \subset \Omega$ .

Zjistili jsme, že řešení lze prodloužit za bod  $b$ , což je spor s jeho maximalitou. Důkaz pro  $t_2$  se udělá obdobně.  $\square$



## 4 Závislost na počáteční podmínce

**Lemma 4.1** (Gronwall). *Nechť  $w(t), g(t)$  jsou nezáporné a spojité na nějakém intervalu  $I$  a nechť  $t_0 \in I, K \geq 0$ . Nechť pro každé  $t \in I$  platí*

$$w(t) \leq K + \left| \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds \right|.$$

*Potom pro každé  $t \in I$  platí*

$$w(t) \leq K \exp \left( \left| \int_{t_0}^t g(s)ds \right| \right).$$

*Důkaz.* Definujeme  $\Phi(t) := K + \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds + \varepsilon$  pro  $t > t_0$  (důkaz pro  $t \leq t_0$  se udělá obdobně). Okamžitě z předpokladů vidíme, že  $w(t) \leq \Phi(t)$ . Zderivujeme funkci  $\Phi(t)$ , dostáváme  $\Phi'(t) = w(t)g(t) \leq \Phi(t)g(t)$  což po vydělení  $\Phi(t)$  (je nenulové díky přičtení  $\varepsilon$ ) nám dává  $\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq g(t)$ , což můžeme přintegrovat od  $t_0$  do  $t$ , čímž dostaneme  $\int_{t_0}^t \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} ds \leq \int_{t_0}^t g(s)ds$ . Po vyčíslení integrálů dostaneme  $\log \Phi(t) - \log \Phi(t_0) \leq \int_{t_0}^t g(s)ds$ . Jelikož  $\exp$  je rostoucí funkce, můžeme psát  $\frac{\Phi(t)}{\Phi(t_0)} \leq \exp \left( \int_{t_0}^t g(s)ds \right)$ .

Nakonec dostáváme  $w(t) \leq \Phi(t) \leq (K + \varepsilon) \exp \left( \int_{t_0}^t g(s)ds \right)$ . Požadované tvrzení získáme posláním  $\varepsilon$  do 0.  $\square$

*konec 3. přednášky (7.3.2025)*

**Lemma 4.2.** *Nechť  $f$  je globálně  $L$ -lipschitzovská v  $\Omega$  vzhledem k  $x$ . Potom pro libovolná dvě řešení  $(x, I), (y, J)$  v  $\Omega$  a body  $t, t_0 \in I \cap J$  platí*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| \exp(L|t - t_0|).$$

*Důkaz.* Můžeme psát

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &= \left\| x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), s)ds - (y(t_0) + \int_{t_0}^t f(y(s), s)ds) \right\| \leq \\ &\leq \|x(t_0) - y(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^t |f(x(s), s) - f(y(s), s)| ds \right\| \leq \\ &\leq \|x(t_0) - y(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^t L|x(s) - y(s)| ds \right\|. \end{aligned}$$

Poté z Gronwallova lemmatu dostáváme, že

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| e^{\left| \int_{t_0}^t L ds \right|} = \|x(t_0) - y(t_0)\| e^{|t - t_0|L},$$

kde funkci  $w(s)$  ze znění lemmatu odpovídá výraz  $\|x(s) - y(s)\|$  a  $K = \|x(t_0) - y(t_0)\|$ .  $\square$

Jednoduchým důsledkem tohoto lemmatu je mj. jednoznačnost řešení (stačí uvažovat řešení s  $x(t_0) = y(t_0)$ ).

**Definice 4.3.** Necht  $f$  je spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k  $x$  v  $\Omega$ . Potom definujeme *řešící funkci*  $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^n$  předpisem  $\varphi(t; t_0, x_0) := x(t)$ , kde  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  je řešení splňující počáteční podmínku  $x(t_0) = x_0$  a  $t \in I$ . Zde  $G$  je maximální množina, tj. obsahuje všechny trojice  $(t; t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2}$  pro něž výraz  $\varphi(t; t_0, x_0)$  má smysl.

Například, uvažujeme-li rovnici  $x'(t) = x(t)$ . Obecným řešením této rovnice je funkce  $x(t) = ce^t$ , vyřešením rovnice s počáteční podmínkou dostaneme řešící funkci  $\varphi(t; t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}$ .

**Věta 4.4.** Množina  $G$  z předchozí definice je otevřená a  $\varphi$  je spojitá na  $G$ .

*Důkaz.* Intermezzo: otevřenost  $G$  znamená, že pro každé  $(x_0, t_0) \in \Omega$  a  $t$  existuje  $r > 0$  takové, že pokud  $\|(y_0, s_0) - (x_0, t_0)\|$  je malé, potom řešení  $y$  procházející bodem  $(y_0, s_0)$  je definované v bodech  $(t-r, t+r)$ , spojitost pak odpovídá tomu, že toto řešení bude po celou dobu “blízko” toho původního.

Bez újmy na obecnosti necht  $t_0 > t$ . Vezměme  $(t; t_0, x_0) \in G$ , buď  $x$  maximální řešení s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$ . Pak  $[t_0, t] \subset D_x$  (řešení je definováno na celém tomto intervalu). Vezměme  $\delta > 0$  tak malé, aby  $[t_0, t+2\delta] \subset D_x$  (to můžeme, neboť  $D_x$  je otevřená) a zároveň  $K_\delta := \{(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : s \in [t_0 - \delta, t + \delta] \wedge |y(s) - x(s)| \leq \delta\} \subset \Omega$ . Takto definovaná množina  $K_\delta$  je kompaktní a tedy  $f$  je na  $K_\delta$  omezená konstantou  $c_0$  (spojitá funkce na kompaktu) díky čemuž z lokální lipschitzovskosti plyne globální  $L$ -lipschitzovskost vzhledem k  $x$ .

Dokážeme, že řešení “blízko” toho původního neopustí “rouru”  $K_\delta$ . Zvolme  $\varepsilon > 0$  takové, aby  $\varepsilon < \frac{\delta}{2(1+c_0)e^{L(t-t_0+2\delta)}}$ . Vezměme  $y_0, s_0$  tak, aby  $|s_0 - t_0| < \varepsilon$ ,  $|x_0 - y_0| < \varepsilon$ . Dále vezmeme  $y$  maximální řešení s podmínkou  $y(s_0) = y_0$ . Chceme dokázat, že  $y$  je definované aspoň na intervalu  $[s_0, t + \delta]$  a platí  $|y(s) - x(s)| \leq \delta$  pro všechna  $s \in [s_0, t + \delta]$ .

Můžeme psát

$$|y(s_0) - x(s_0)| \leq |y(s_0) - x(t_0)| + |x(t_0) - x(s_0)| \leq$$

$$|y_0 - x_0| + |x'(\xi)| |t_0 - s_0| \leq (1 + c_0)\varepsilon,$$

kde  $\xi$  je konstanta z Lagrangeovy věty, která ve vícerozměrném prostoru platí pouze jako neostrá nerovnost.

Dále odhadujeme (použijeme Lemma 4.2)

$$|y(s) - x(s)| \leq |y(s_0) - x(s_0)| e^{L|s-s_0|} \leq (1 + c_0)\varepsilon e^{L|s-s_0|} \leq (1 + c_0)\varepsilon e^{L(t-t_0+2\delta)},$$

kde uvažujeme pouze body  $s$ , pro které existuje  $y(s)$  a  $y$  leží v  $K_\delta$  na  $[s_0, s]$ . Z volby  $\varepsilon$  dostáváme navíc

$$|y(s) - x(s)| \leq (1 + c_0)\varepsilon e^{L(t-t_0+2\delta)} < \frac{\delta}{2}. \quad (2)$$

Maximální řešení  $y$  opustí kompakt (Věta 3.5)  $K_\delta$  někde za časem  $s_0$ . Označme  $\gamma$  čas prvního opuštění (přesněji řečeno infimum všech časů, kdy to už není v tom kompaktu). Na intervalu  $[s_0, \gamma]$  platí odhad (2), tedy  $|y(\gamma) - x(\gamma)| < \frac{\delta}{2}$ , z čehož máme  $\gamma = t + \delta$ , to znamená, že kompakt nemůžeme opustit jinak než za časem  $t$ . Tím jsme dokázali otevřenost  $G$ .

Dokážeme spojitost  $\varphi$  na  $G$ . Vezmeme dva body  $(t; t_0, x_0)$  a  $(s; s_0, y_0)$  jako minule a uvažujeme rozdíl

$$\begin{aligned} |\varphi(t; t_0, x_0) - \varphi(s; s_0, y_0)| &\leq |\varphi(t; t_0, x_0) - \varphi(s; t_0, x_0)| + \\ &|\varphi(s; t_0, x_0) - \varphi(s; s_0, y_0)| \leq |x(t) - x(s)| + |x(s) - y(s)| \leq \\ c_0(t - s) + |x(s_0) - y(s_0)|e^{L|s-s_0|} &\leq c_0|t - s| + (1 + c_0)e^{L|s-s_0|}|x_0 - y_0|, \end{aligned}$$

čímž jsme ukázali lipschitzovskost, a tedy spojitost  $\varphi$  na  $G$ .  $\square$

Z hlediska praktických aplikací často uvažujeme rovnici (1) ve tvaru  $x' = f(x, t, \lambda)$  závislém na hodnotě parametru  $\lambda$ . Přidejme druhou rovnici  $\lambda' = 0$  a počáteční podmínky  $x(t_0) = 0$  a  $\lambda(t_0) = \lambda_0$ , čímž jsme závislost na parametru převedli na závislost na počáteční podmínce (v případě, že  $f$  je závislý na  $\lambda$  lipschitzovsky).

Označme pro účely následující věty  $\frac{\partial}{\partial w}$  derivaci ve směru  $w \in \mathbb{R}^n$  dle proměnné  $x_0$ .

**Věta 4.5.** *Nechť  $f \in C_x^1(\Omega)$ ,  $w \in \mathbb{R}^n$ . Potom  $\frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$  existuje v každém bodě  $G$ . Označíme-li  $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$  a  $u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ , pak funkce  $u$  je řešením rovnice ve variacích*

$$u' = \nabla_x f(x(t), t)u, u(t_0) = w. \quad (3)$$

*konec 4. přednášky (14.3.2025)*

*Důkaz.* Větu dokážeme za silnějšího předpokladu  $f \in C_x^2(\Omega)$ .

Vezmeme pevně bod  $(x_0, t_0)$  a víme, že tímto bodem prochází právě jedno maximální řešení, označíme ho  $x(t)$ . Dále označme  $A(t) = \nabla_x f(x(t), t)$ . Potom  $A(t)$  je matice  $n \times n$ . Vezmeme pevné  $w \in \mathbb{R}^n$  a označme  $u(t)$  maximální řešení počáteční úlohy (3).

Dle Věty 5.4 existuje právě jedno řešení a je definované na celém intervalu, kde je definovaná  $A(t)$ . Chceme dokázat, že  $u(t) = \frac{\partial}{\partial w}\varphi(t, t_0, x_0)$ . Z definice máme, že

$$\frac{\partial}{\partial w}\varphi(t, t_0, x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)).$$

Vezmeme  $t$  pevné tak, aby  $(t, t_0, x_0) \in G$ , tedy  $x(t)$  je dobře definované. Vezmeme dost malé  $h$  tak, aby  $\varphi(t, t_0, x_0 + hw)$  bylo definované. Položme  $y_h(t) := \varphi(t, t_0, x_0 + hw)$ .

Definujeme funkci  $\eta_h(t) = \frac{1}{h}(y_h(t) - x(t)) - u(t)$ . Ukážeme, že  $\lim_{h \rightarrow 0} \eta_h(t) = 0$ . Pišme

$$\eta_h'(t) = \frac{1}{h}(y_h'(t) - x'(t)) - u'(t) = \frac{1}{h}(f(y_h(t), t) - f(x(t), t)) - \nabla_x f(x(t), t)u(t).$$

Použijeme Taylorův rozvoj prvního řádu pro funkci  $f$ , dostaneme

$$\eta'_h(t) = \frac{1}{h}(\nabla_x f(x(t), t)(y_h(t) - x(t)) + \frac{1}{2}(y_h(t) - x(t))^T \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x(t), t)(y_h(t) - x(t)) - \nabla_x f(t, x(t))u(t).$$

Tedy máme, že

$$\eta'_h(t) = \nabla_x f(x(t), t) \left[ \frac{1}{h}(y_h(t) - x(t)) - u(t) \right] + \frac{1}{h}z_n(t).$$

Potom  $\eta'_h(t) = A(t)\eta_h(t) + z_n(t)$ .

Pro  $h$  malé je vše v  $K_\delta$  z Věty 4.4. Na  $K_\delta$  jsou  $\nabla_x f$  a  $\nabla_x^2 f$  omezené  $\leq M$ . Zde předpokládáme, že  $f \in C_x^2(\Omega)$ . Potom z Lemmatu 4.2 můžeme psát

$$\|z_h(t)\| \leq \frac{1}{2}M\|y_h(t) - x(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}M\|y_h(t_0) - x(t_0)\|^2 e^{2M|t-t_0|} \leq Ch^2\|w\|^2.$$

Uvědomíme si, že  $\eta_h(t_0) = 0$  a napíšeme integrální rovnici odpovídající diferenciální rovnici pro  $\eta'_h$

$$\eta_h(t) = \eta_h(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)\eta_h(s) + z_n(s)ds,$$

Tedy  $\|\eta_h(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t M\|\eta_h(s)\| + Chds \right| = C|t - t_0|h + \left| \int_{t_0}^t M\|\eta_h(s)ds \right|$ . Použijeme Gronwallovo lemma (Lemma 4.1), dostaneme.

$$\|\eta_h(t)\| \leq \tilde{C}he^{M|t-t_0|},$$

tedy  $\eta_h(t) \rightarrow 0$  pro  $h \rightarrow 0$ , čímž je důkaz ukončen.  $\square$

Ukážeme si jednu aplikaci následující věty pro výpočet derivace řešící funkce.

**Příklad 4.6.** Mějme rovnici  $x' = x$ , její řešící funkce má tvar  $\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}$ . Potom  $\frac{d}{dx}\varphi(t, t_0, x_0) = e^{t-t_0}$ . Totéž můžeme spočítat z předchozí věty. Hledaná funkce řeší diferenciální rovnici  $u' = u$  s počáteční podmínkou  $u(t_0) = t$ . Jejím řešením je  $e^{t-t_0}$ , což jsme chtěli dokázat.

Za uvedených předpokladů dokonce  $\frac{d\varphi}{dw}$  závisí spojitě na  $x_0$  tj. řešící funkce je diferencovatelná (má totální diferenciál) vzhledem k  $x_0$ . Lze též ukázat, že  $\varphi$  je diferencovatelná vůči  $t$  a  $t_0$ .

## 5 Lineární rovnice

**Definice 5.1.** Normu matice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definujeme

$$\|A\| = \sup\{|Ax|; x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\},$$

kde  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  je norma vektoru  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Věta 5.2** (Vlastnosti normy matice). *Nechť  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Potom:*

(i)  $\|A\| \geq 0$  a  $\|A\| = 0$  právě když  $A = 0$ .

(ii)  $\|aA\| = |a|\|A\|$  pro všechna  $a \in \mathbb{R}$ .

(iii)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

(iv)  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ .

(v)  $|Ax| \leq \|A\||x|$  pro  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(vi) Je-li  $A$  regulární, pak  $|Ay| \geq \frac{|y|}{\|A^{-1}\|}$  pro  $y \in \mathbb{R}^n$ .

*Důkaz.* První tři vlastnosti říkájí, že operátor  $\|\cdot\|$  je norma (cvičení).

Dokážeme vlastnost (v). Příklad  $x = 0$  je triviální, nechť tedy  $x \neq 0$ . Položme  $y = \frac{x}{|x|}$ . Potom můžeme psát

$$|Ax| = |A(|x|y)| = |x||Ay| = |x|\|Ay\| \leq |x|\|A\|.$$

K důkazu vlastnosti (iv) můžeme psát  $|ABx| \leq \|A\|\|B\||x|$ , kde jsme dvakrát použili již dokázanou vlastnost (v). Potom

$$\|AB\| = \sup_{|x| \leq 1} |ABx| \leq \sup_{|x| \leq 1} \|A\|\|B\||x| \leq \|A\|\|B\| \cdot 1.$$

Nakonec, pro vlastnost (vi) položíme  $v := Ay$ , tedy  $y = A^{-1}v$ . Potom

$$|y| = |A^{-1}v| \leq \|A^{-1}\||v| = \|A^{-1}\||Ay|, \text{ tedy } |Ay| \geq \frac{|y|}{\|A^{-1}\|},$$

čímž je důkaz ukončen. □

**Definice 5.3.** Lineární rovnici rozumíme rovnici

$$x' = A(t)x + g(t), x(t_0) = x_0, \quad (4)$$

kde  $A(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $g(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  jsou spojité.

V přednášce MA3 jste již studovali tento typ rovnic, teď se však budeme věnovat obecnějšímu případu, kdy  $A$  a  $g$  závisí na  $t$ .

**Věta 5.4** (Globální existence a jednoznačnost). *Nechť  $t_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  je dáno. Pak existuje jediné řešení rovnice (4) definované na celém  $(a, b)$  splňující počáteční podmínku  $x(t_0) = x_0$ .*

*Důkaz.* Rovnice (4) je ekvivalentní rovnici (1), kde  $f(x, t) = A(t) \cdot x + g(t)$ . Můžeme psát

$$|f(x, t) - f(y, t)| = |A(t)x - A(t)y| \leq \|A(t)\| |x - y|.$$

Funkce  $A(t)$  je omezená na kompaktních intervalech, tedy  $f$  je lipschitzovská. Tedy pro každou počáteční podmínku existuje právě jedno maximální řešení. Dokážeme, že toto řešení je definované na celém  $(a, b)$ .

*konec 5. přednášky (21.3.2025)*

Předpokládejme, že řešení není definované na celém  $(a, b)$ . Potom existují  $\alpha, \beta \in (a, b)$  takové, že řešení je definováno na  $(\alpha, \beta)$ . Toto řešení musí opustit každý kompaktní, tedy mimo jiné i  $K = [t_0, \beta] \times \overline{B(0, R)}$ , kde  $R$  je dostatečně velké. Řešení  $x$  splňuje

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^t (\|A(s)\| |x(s)| + |g(s)|) ds \stackrel{\substack{\|A(s)\| \leq L \\ |g(s)| \leq \tilde{C} \\ |x(t_0)| = C}}{\leq} C + \int_{t_0}^t (L|x(s)| + \tilde{C}) ds \leq$$

Z Gronwallova lemmatu dostaneme

$$\leq C + \tilde{C}(\beta - t_0) + \int_{t_0}^{\beta} L|x(s)| ds \implies |x(t)| \leq \underbrace{(C + \tilde{C}(\beta - t_0))e^{L(\beta - t_0)}}_R.$$

Došli jsme ke sporu s Větou 3.5, neboť řešení  $x$  nemůže opustit kompaktní  $K$ .  $\square$

Důležitá poznámka: řešení existuje globálně na oboru spojitosti  $A(t), g(t)$ . Ve skutečnosti předchozí věta i pro nelineární rovnice  $x' = f(x, t)$  se sublineární pravou stranou, tj. pokud  $|f(x, t)| \leq a(t)|x| + g(t)$ , kde  $a(\cdot), g(\cdot)$  jsou spojitě.

**Definice 5.5.** *Homogenní rovnici* rozumíme rovnici (4) pro  $g(t) \equiv 0$ , tj.

$$x' = A(t)x, x(t_0) = x_0. \quad (5)$$

Použijeme znalosti lineární algebry k tomu, abychom mohli formalizovat postup řešení lineárních ODR.

**Věta 5.6** (Prostor řešení). *Množina  $\mathcal{R}_H$  řešení homogenní rovnice (5) bez zadané počáteční podmínky tvoří  $n$ -dimenzionální podprostor  $C^1((a, b), \mathbb{R}^n)$ .*

*Důkaz.* Jádro lineárního zobrazení  $Lx := x' - Ax$  je vektorový prostor. Dokážeme, že má dimenzi  $n$ . Nechť  $i = 1, \dots, n$  a  $x(t_0) = e_i$ , pro tuto počáteční podmínku dostaneme řešení  $x^i$ . Potom  $\{x^1, \dots, x^n\}$  tvoří bázi prostoru všech řešení. Skutečně, tyto vektory jsou lineárně nezávislé, mějme lineární kombinaci  $c_1 x^1 + \dots + c_n x^n = 0$ , speciálně v čase  $t_0$  máme  $c_1 e^1 + \dots + c_n e^n$ , což implikuje, že  $c_i = 0$  pro každé  $i$ . Navíc vezmeme libovolné řešení  $z' = A(t)z$ , opět zkoumejme stav v čase  $t_0$ . Máme  $z(t_0) = d_1 e^1 + \dots + d_n e^n$  pro vhodná  $d_1, \dots, d_n$ . Definujme  $y(t) := d_1 x^1(t) + \dots + d_n x^n(t)$ , tedy  $y$  řeší rovnici  $y' = Ay$  a  $y(t_0) = z(t_0)$ , z čehož díky jednoznačnosti řešení dostáváme  $y = z$ . Nalezli jsme  $n$ -prvkovou bázi, tedy prostor  $\mathcal{R}_H$  má dimenzi  $n$ .  $\square$

**Definice 5.7.** *Fundamentální systémem* pro (5) rozumíme libovolnou bázi  $\mathcal{R}_H$ . Matice, jejíž sloupce tvoří prvky libovolného fundamentálního systému, nazýváme *fundamentální maticí* pro (5).

Uvedeme si několik poznámek k definici fundamentální matice. Je-li  $\Phi(t)$  nějaká fundamentální matice, pak

- $\Phi(t)$  splňuje “maticový tvar (5)”, tedy  $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ .
- $\Phi(t)$  je regulární pro každé  $t \in (a, b)$ .
- Obecné řešení (5) má tvar  $\Phi(t)c$ , kde  $c \in \mathbb{R}^n$ .
- $\tilde{\Phi}(t) := \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$  je také fundamentální matice, která navíc splňuje  $\tilde{\Phi}(t_0) = I$ .

**Věta 5.8** (Variace konstant). *Nechť  $\Phi(t)$  je libovolná fundamentální matice pro (5). Potom řešení nehomogenní rovnice (4) lze napsat ve tvaru*

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)g(s)ds$$

pro  $t \in (a, b)$

*Důkaz.* Zderivováním dostaneme  $x' = A(t)x + g(t)$ , dále stačí ověřit počáteční podmínku dosazením.  $\square$

**Definice 5.9.** *Wronského determinant* (Wronskián) rovnice (5) je reálná funkce  $w(t) := \det(\Phi(t))$ , kde  $\Phi$  je libovolná fundamentální matice příslušné rovnice.

**Věta 5.10** (Liouvilleova formule). *Nechť  $\Phi(t)$  je maticové řešení (5) a nechť  $w(t) = \det \Phi(t)$ . Potom*

$$w(t) = w(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right),$$

kde  $\operatorname{tr} A$  je stopa matice  $A$ .

*Důkaz.* Dokazovaná rovnost je ekvivalentní s

$$w'(t) = w(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right) \operatorname{tr} A(t)$$

a tedy

$$w'(t) = \operatorname{tr} A(t)w(t), w(t_0) = w(t_0)$$

Dále

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \Phi(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{\sigma} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} \Phi_{1,\sigma(1)}(t) \dots \Phi_{n,\sigma(n)}(t) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\sigma} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} \overbrace{\Phi \dots \Phi}^{\Phi' \text{ je v } k\text{-tém řádku}} = \sum_{k=1}^n \det D_k, \end{aligned}$$

kde  $D_k$  je matice  $\Phi$  se zderivovaným  $k$ -tým řádkem.

*konec 6. přednášky (28.3.2025)*

Dále si uvědomíme, že  $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ , přičemž násobení maticí zleva provádí řádkové úpravy na matici  $\Phi(t)$ . Konkrétně  $\varphi_k^{j'}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ki}(t)\varphi_i^j(t)$ .

Platí  $\det D_k = A_{kk}(t) \det \Phi(t)$  (vlastnosti determinantu). Z toho dostáváme, že  $w'(t) = \det \Phi(t) \sum_{k=1}^n A_{kk}(t) = w(t) \cdot \operatorname{tr} A(t)$ .  $\square$

Pokud  $\operatorname{tr} A(t) > 0$ , potom wronskián roste,  $= 0$  množina možných hodnot řešení zachovává objem a pro  $\operatorname{tr} A(t) < 0$  v průběhu času objem klesá.

**Příklad 5.11.** Řešme rovnici

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dostáváme  $x' = 2x, y' = -2y$ , tedy  $x = x(0)e^{2t}, y = y(0)e^{-2t}$ . Nechť  $x(0), y(0) \in [0, 1]$ . Potom pro fixní  $t_1 > 0$  dostáváme  $x(t_1) \in [0, e^{2t_1}], y(t_1) \in [0, e^{-2t_1}]$ . Obsah tohoto obdélníku je  $e^{2t_1}e^{-2t_1} = 1$ . Tedy, obsah je konstantní, což odpovídá pozorování z věty, neboť stopa matice ze zadání je nulová.

**Příklad 5.12.** Mějme rovnici  $x' = f(t, x)$ . Ukážeme si, že roli stopy matice z předchozího příkladu tu hraje divergence  $f$  v proměnné  $x$ .



## 6 Lineární rovnice s konstantními koeficienty

**Definice 6.1.** *Lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty* a s maticí  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je rovnice

$$x' = Ax. \quad (6)$$

Myšlenkou studia těchto rovnic je analogie s rovnicí  $x' = ax$  pro  $a \in \mathbb{R}$ , kde řešením je  $x(t) = x_0 e^{at}$ . Ukážeme, že rovnice (6) má řešení  $x(t) = e^{At} x_0$ .

**Definice 6.2.** *Maticovou exponenciálu* definujeme předpisem

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

s konvencí  $A^0 = I$ .

Řada s definice maticové exponenciály je dobře definovaná, neboť  $\|\frac{1}{k!} A^k\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k$ , přičemž  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c^k = e^c$  konverguje pro každé  $c \in \mathbb{R}$ . Navíc z tohoto odhadu dostáváme  $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$ .

**Příklad 6.3.** Nechť  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Potom

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{2^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{1^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

**Věta 6.4.** *Nechť  $U(t) = e^{tA}$ . Pak  $U(t)$  je fundamentální matice rovnice (6) a platí  $U(0) = I$ .*

*Důkaz.* Řada konverguje pro všechny matice, tedy i pro matici  $tA$ , což znamená, že  $U$  je dobře definovaná. Platí

$$[U(t)]_{ij} = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [A^k]_{ij} t^k.$$

Toto je mocninná řada s poloměrem konvergence  $\infty$ , tedy ji můžeme derivovat člen po členu (nultý člen se zderivuje na nulu).

$$U'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{k-1} = A e^{tA} = A U(t).$$

Vytknutí  $A$  můžeme provést, neboť operátor násobení maticí  $A$  je spojitý.

Závěr ohledně  $U(0)$  plyne z toho, že pro  $t = 0$  je první člen sumy roven jednotkové matici a všechny ostatní jsou nulové.  $\square$

Z obecného tvaru řešení dostáváme, že  $x(t) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) x_0$ , přičemž  $t_0 = 0$  a tedy  $U(0) = U^{-1}(0) = I$ . Z toho již plyne  $x(t) = e^{tA} x_0$ .

**Věta 6.5** (Vlastnosti maticové exponenciály). *Platí následující vlastnosti maticové exponenciály*

- (i)  $e^{aI} = e^a I$  pro  $a \in \mathbb{R}$ ;
- (ii) pokud  $AB = BA$ , pak  $e^{A+B} = e^A e^B$ ;
- (iii)  $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$ ;
- (iv)  $e^{-A} = (e^A)^{-1}$ , speciálně  $e^A$  je vždy regulární.

*Důkaz.* Budeme dokazovat postupně.

- (i) Dosazením dostáváme

$$e^{aI} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} I = I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} I = e^a I.$$

- (ii) Nejprve ukážeme, že  $Be^{tA} = e^{tA}B$ . To plyne z toho, že

$$Be^{tA} = B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} B \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} B = e^{tA}B.$$

Potom z definice  $U(t) = e^{tA}e^{tB}$  a  $U'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)U(t)$ . Tedy  $U(t)$  splňuje rovnici  $x'(t) = (A+B)x(t)$ , kterou také splňuje  $\tilde{U}(t) = e^{(A+B)t}$ . Z jednoznačnosti řešení této rovnice dostáváme  $e^A e^B = e^{A+B}$ .

- (iii) Z definice rozepíšeme

$$e^{C^{-1}AC} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (C^{-1}AC)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C^{-1} A^k C = C^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k C = C^{-1} e^A C.$$

- (iv) Okamžitě plyne z (ii), neboť  $e^A e^{-A} = e^0 = I$

□

**Důsledek 6.6** (Variace konstant pro (6)). *Nechť  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $g(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  je spojitá,  $t_0 \in (a, b)$  a  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  jsou dána. Potom řešení rovnice*

$$x' = Ax + g(t), x(t_0) = x_0$$

*má tvar*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} g(s) ds.$$

Další otázka, kterou se budeme zabývat, je hledání maticové exponenciály. K tomu použijeme takzvaný Jordanův kanonický tvar matice.

**Věta 6.7.** *Nechť  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $J$  její Jordanův kanonický tvar,  $A = VJV^{-1}$  a  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  je diagonála  $J$ . Potom  $e^{tA} = Ve^{tJ}V^{-1}$ , kde matici  $e^{tJ}$  definujeme jako  $\text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$ , přičemž  $P(t)$  je blokově diagonální matice se stejně velkými a stejně uspořádanými bloky jako  $J$  a blok velikosti  $k$  matice  $P(t)$  je roven*

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \dots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(k-2)!}t^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Důsledek 6.8.** *Bud'  $a = \max\{\Re \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$  a  $m$  velikost největší Jordanovy buňky příslušné k vlastnímu číslu  $\Re \lambda = a$ . Pak existuje  $M > 0$ , že  $\|e^{tA}\| \leq Mt^{m-1}e^{at}$  pro všechna  $t \geq 0$ . Speciálně, pro všechna  $\tilde{a} > a$  existuje  $\tilde{M} > 0$  takové, že  $\|e^{tA}\| \leq \tilde{M}e^{\tilde{a}t}$ .*

*konec 7. přednášky (4.4.2025)*

**Definice 6.9.** Pro matici  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a její spektrum  $\sigma(A)$  definujeme  $\sigma_-(A) = \sigma(A) \cap \{\Re < 0\}$ ,  $\sigma_0(A) = \sigma(A) \cap \{\Re = 0\}$ ,  $\sigma_+(A) = \sigma(A) \cap \{\Re > 0\}$ . Příslušné podprostory generované příslušnými (zobecněnými) vlastními vektory značíme  $X_-(A)$ ,  $X_0(A)$ ,  $X_+(A)$  (nazýváme je *stabilní*, *centrální* a *nestabilní* podprostor).

Zřejmě  $\mathbb{R}^n = X_+(A) \oplus X_-(A) \oplus X_0(A)$ . Tyto prostory jsou invariantní vzhledem k  $A$  a též vzhledem k  $e^{tA}$ .

**Věta 6.10** (Asymptotické chování podprostorů). *Nechť  $A$  je daná matice. Potom existují kladná  $\alpha, \beta, M$  a  $c$  taková, že platí:*

1. *Pokud  $x_0 \in X_-(A)$ , pak  $|e^{tA}x_0| \leq ce^{-\alpha t}|x_0|$  pro každé  $t \geq 0$ .*
2. *Pokud  $x_0 \in X_+(A)$ , pak  $|e^{tA}x_0| \leq ce^{\beta t}|x_0|$  pro každé  $t \leq 0$ .*
3. *Pokud  $x_0 \in X_0(A)$ , pak  $|e^{tA}x_0| \leq c(1 + |t|)^M|x_0|$  pro každé  $t \in \mathbb{R}$ .*

*Důkaz.* Nejdříve nechť  $x_0 \in X_-(A)$ . Potom  $x_0 = \sum_{i=1}^k a_i v_i$ , kde  $v_i$  jsou zobecněné vlastní vektory příslušné  $\lambda_i \in \sigma_-(A)$ . Dále máme, že  $e^{tA}x_0 = Ve^{tJ}V^{-1}x_0$ . Spočteme  $V^{-1}x_0$ . Jestliže  $v$  je sloupec matice  $V$ , potom  $V^{-1}v$  je jeden ze sloupců jednotkové matice, tedy má tvar  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ . Tedy  $V^{-1}x_0$  má nenulové hodnoty jen v řádcích příslušných  $\Re \lambda < 0$ . Můžeme odhadovat normu

$$\|e^{tA}x_0\| \leq \|V\| \|e^{tJ} \text{ řádky s } e^{-\alpha t}\| \|V^{-1}x_0\| \leq Ce^{-\alpha t} \|x_0\|.$$

Zde jsme využili faktu, že "polynom"  $e^{-\lambda t} t^k$  lze odhadnout  $e^{-\lambda t} t^k \leq e^{(-\lambda + \varepsilon)t} c$  pro vhodná  $c$  a  $\varepsilon$ .

Důkaz ostatních implikací je podobný. □

V předchozí větě platí i opačná implikace, a to ve smyslu, že uvedené vlastnosti charakterizují dané podprostory.

## 7 Stabilita

Lemma 4.2 nám teoreticky poskytuje spojitost řešící funkce v proměnné  $x_0$ , pro větší  $t$  však kvůli exponenciálnímu růstu nemá význam. Budeme proto zkoumat okolnosti, za nichž existují odhady, které se nezhoršují pro  $t \rightarrow \infty$ .

**Definice 7.1.** Nechť  $f = f(x, t)$  je spojitá v otevřené  $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$  a navíc lokálně lipschitzovská vůči  $x$ . Nechť  $\Omega \supset \{0\} \times I$  kde  $I = (\tau, \infty)$  a nechť  $f(0, t) = 0$  pro všechna  $t \in I$ . Řekneme, že nulové řešení rovnice (1) ( $x' = f(t, x)$ ) je

- (i) *stabilní*, jestliže pro všechna  $t_0 \in I$  a  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro  $|x_0| < \delta$  platí, že  $\varphi(t, t_0, x_0)$  je definováno a splňuje  $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$  pro libovolné  $t \geq t_0$ ;
- (ii) *nestabilní*, jestliže není stabilní;
- (iii) *lokální atraktor*, jestliže  $\forall t_0 \in I$  existuje  $\eta > 0$  tak, že pro  $|x_0| < \eta$  je definován výraz  $\varphi(t, t_0, x_0)$  pro všechna  $t \geq t_0$  a navíc  $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow 0$  pro  $t \rightarrow +\infty$ ;
- (iv) *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc lokální atraktor;
- (v) *uniformně stabilní*, jestliže pro všechna  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro všechna  $t_0 \in I$  z  $|x_0| < \delta$  plyne, že výraz  $\varphi(t, t_0, x_0)$  je definován a splňuje  $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$  pro  $t \geq t_0$ ;
- (vi) *uniformně asymptoticky stabilní*, jestliže je uniformně stabilní a navíc existuje  $\eta < 0$  takové, že  $\forall \varepsilon > 0$  existuje  $T > 0$  takové, že pro všechna  $t_0 \in I$  z  $|x_0| < \eta$  plyne, že  $\varphi(t, t_0, x_0)$  je definováno pro všechna  $t \geq t_0$  a  $|\varphi(t, t_0, x_0)| \leq \varepsilon$  pro  $t \geq t_0 + T$ .

Pojem asymptotické stability zavádíme proto, že lokální atraktor nutně nemusí implikovat stabilitu. Konstrukci takového řešení můžeme nahlédnout pomocí tzv. Vinogradovova systému. V případě autonomní rovnice splývají pojmy (asymptotické) stability a uniformní (asymptotické) stability, neboť můžeme psát  $\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, 0, x_0)$ .

Obecněji řečeno, řešení  $\tilde{x}(t)$  rovnice  $x' = f(x, t)$  se nazve stabilní (resp. uniformně stabilní atd.), jestliže má analogickou vlastnost nulové řešení rovnice  $u' = g(u, t)$  kde  $g(u, t) = f(\tilde{x}(t) + u, t) - f(\tilde{x}(t), t)$ .

V případě řešení lineární rovnice (4), tj.  $x' = A(t)x + g(t)$  je stabilita ekvivalentní stabilitě libovolného řešení příslušné homogenní rovnice (5).

**Věta 7.2.** Je dána rovnice  $x' = A(t)x$ , kde  $A(t)$  je spojitá v  $I = (\tau, \infty)$ . Nechť  $\Phi(t)$  je (libovolná) fundamentální matice. Potom nulové řešení je

- 1. *stabilní*, právě když pro  $\forall t_0 \in I$  je  $\|\Phi(t)\|$  omezená v  $[t_0, \infty)$ ;
- 2. *asymptoticky stabilní*, právě když  $\|\Phi(t)\| \rightarrow 0$  pro  $t \rightarrow \infty$ ;
- 3. *uniformně stabilní*, právě když existuje  $c > 0$  takové, že pro všechna  $s < t \in I$  je  $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq c$ .

4. *uniformně asymptoticky stabilní, právě když existují kladná  $\alpha$  a  $c$  taková, že pro všechna  $s < t \in I$  je  $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq ce^{-\alpha(t-s)}$ .*

**Věta 7.3.** *Nechť  $A$  je konstantní matice. Potom nulové řešení rovnice  $x' = Ax$  je*

1. *(uniformně) stabilní, právě když  $\Re \lambda \leq 0$  pro všechna vlastní čísla  $\lambda \in \sigma(A)$ , přičemž  $\Re \lambda = 0$  pouze pro polojednoduchá vlastní čísla (tedy příslušné Jordanovy buňky mají velikost 1).*
2. *(uniformně) asymptoticky stabilní, právě když  $\Re \lambda < 0$  pro všechna vlastní čísla  $\lambda \in \sigma(A)$ .*

*Důkaz.* Plyne ihned z tvaru maticové exponenciály. □

Matice  $A$  splňující  $\Re \lambda < 0$  pro všechna  $\lambda \in \sigma(A)$  se nazývá *Hurwitzowská*.

**Lemma 7.4.** *Je dána rovnice  $x' = Ax + r(x, t)$ . Nechť existují kladná  $\alpha, c$  tak, že  $\|e^{tA}\| \leq ce^{-t\alpha}$  pro  $t \geq 0$ . Nechť dále  $r(x, t) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  je spojitá a  $|r(x, t)| \leq \gamma|x|$  pro všechna  $x, y$  kde  $\gamma < \frac{\alpha}{c}$ . Pak každé řešení splňuje*

$$|x(t)| \leq c|x(t_0)| \exp(-\beta(t - t_0))$$

pro  $t \geq t_0$ , kde  $\beta = \alpha - c\gamma > 0$ .

*Důkaz.* Nechť  $x$  řeší  $x' = Ax + r(x, t)$  na  $(0, +\infty)$ . Pak  $x$  řeší  $x' = Ax + g(t)$ , kde  $g(t) := r(x(t), t)$ . Z variace konstant (Důsledek 6.6) dostáváme, že

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}g(s)ds.$$

Pro  $t > t_0$  dostaneme

$$\|x(t)\| \leq ce^{-(t-t_0)\alpha}\|x_0\| + \int_{t_0}^t ce^{-(t-s)\alpha}\gamma\|x(s)\|ds.$$

Jinými slovy,

$$\|x(t)\|e^{t\alpha} \leq ce^{t_0\alpha}\|x_0\| + \int_{t_0}^t ce^{-(t-s)\alpha}\gamma\|x(s)\|ds.$$

Z Gronwallova lemmatu (Lemma 4.1) dostáváme

$$e^{t\alpha}\|x(t)\| \leq ce^{t_0\alpha}\|x_0\|e^{c\gamma(t-t_0)}.$$

Po opětovném přenásobení exponenciálou nakonec máme

$$\|x(t)\| \leq c\|x_0\|e^{(t-t_0)(c\gamma-\alpha)} = ce^{-\beta(t-t_0)}\|x_0\|.$$

□

**Věta 7.5** (o linearizované stabilitě). *Je dána rovnice  $x' = f(x)$ . Nechť  $f(x_0) = 0$  a  $f(x)$  je  $C^1$  na okolí  $x_0$  a nechť  $\Re \lambda < 0$  pro každé  $\lambda \in \sigma(A)$ , kde  $A = \nabla f(x_0)$ . Potom  $x_0$  je (uniformně) asymptoticky stabilní.*

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti uvažujme  $x_0 = 0$ . Dále definujeme  $g(x) = f(x) - Ax$ . Potom naši rovnici přepíšeme do tvaru  $x' = Ax + g(x)$ .

O matici  $A$  můžeme říct, že  $\|e^{tA}\| \leq ce^{-\alpha t}$ . Přesněji řečeno, nechť  $\lambda_0 := \max\{\Re \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ . Nechť  $-\alpha \in (\lambda_0, 0)$  a k tomuto  $\alpha$  nalezneme  $c > 0$  takové, že platí výše uvedená rovnost. Existenci takového  $c$  nám zaručuje Důsledek 6.8.

Dále o funkci  $g$  víme, že  $g(x) = o(\|x\|)$  a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\|x\|} = 0$ . Nechť  $\gamma < \frac{\alpha}{c}$ , vezmeme  $\delta > 0$  dost malé, aby  $\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} < \gamma$  na  $B(0, \delta)$ . Pak na tomto okolí platí  $\|g(x)\| \leq \delta \|x\|$ .

Použijeme seřezávací funkci

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t < \frac{\delta}{2}; \\ 0, & t > \delta; \\ \text{spojité prodloužení na } (\frac{\delta}{2}, \delta). \end{cases}$$

Dále definujeme  $h(x) := \eta(\|x\|)g(x)$ . Podíváme se na rovnici  $x' = Ax + h(x)$ . Pro  $\|x\| < \frac{\delta}{2}$  platí  $h(x) = g(x)$ , dále pro  $\|x\| > \delta$  je  $h(x)$  nulová a nakonec pro  $\|x\| \in [\frac{\delta}{2}, \delta]$  platí  $\|h(x)\| \leq \|g(x)\|$ . Tato porušená rovnice již splňuje předpoklad Lemmatu 7.4. Aplikací tohoto lemmatu dostáváme odhad na řešení této porušené rovnice.

$$\|x(t)\| \leq c\|x(t_0)\|e^{-\beta(t-t_0)}, \beta > 0.$$

Vezmeme  $x(t_0)$  dost malé, potom díky předchozímu odhadu funkce  $x$  zůstane v  $B(0, \frac{\delta}{2})$  pro všechna  $t \geq 0$ , tedy  $h(x) = g(x)$ , z čehož nakonec dostáváme, že  $x$  řeší i původní rovnici  $x' = Ax + g(x)$ . Tím jsme dokázali, že řešení začínající blízko nuly zkolabují v nekonečno, což je právě definice asymptotické stability.  $\square$

**Věta 7.6** (o linearizované nestabilitě). *Je dána rovnice  $x' = f(x)$ . Nechť  $f(x_0) = 0$  a  $f(x)$  je  $C^1$  na okolí  $x_0$  a nechť existuje vlastní číslo  $\lambda \in \sigma(A)$  takové, že  $\Re \lambda > 0$ , kde  $A = \nabla f(x_0)$ . Potom  $x_0$  není stabilní.*

*Důkaz.* Idea důkazu: nejdříve si matici  $A$  převedeme do Jordanova kanonického tvaru, poté si ukážeme, že řešení “se drží” nestabilního směru. Nakonec důkaz formálně dokončíme pomocí věty o opuštění kompaktu (Věta 3.5).

Bez újmy na obecnosti uvažujme  $x_0 = 0$ . Nechť tedy  $A = VJV^{-1}$  je převod matice  $A$  do Jordanova tvaru. Přenásobíme matici  $J$  zprava maticí  $H = \text{diag}(\eta, \eta^2, \dots, \eta^n)$  a zleva maticí  $H^{-1} = \text{diag}(\eta^{-1}, \dots, \eta^{-n})$ . Dostáváme matici v Jordanově kanonickém tvaru, kde místo jedniček máme  $\eta$ . Potom  $A = (VH)\tilde{J}(VH)^{-1}$  Můžeme psát

$$x' = Ax + g(x) = (VH)\tilde{J}(VH)^{-1}x + g(x).$$

Nechť  $y := (VH)^{-1}x$ , potom

$$y' = (VH)^{-1}x' = \tilde{J}y + (VH)^{-1}g(VHy).$$

Označme  $\tilde{g}(y) := g(VHy)$ . Dostali jsme tedy rovnici  $y' = \tilde{J}y + \tilde{g}(y)$ . Platí  $\tilde{g}(y) = o(\|y\|)$  (plyne z toho, že  $g(x) = o(\|x\|)$ ).

Mějme vektor  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Nechť  $z = (z_1, \dots, z_j)$  jsou nestabilní směry a  $w = (w_{j+1}, \dots, w_n)$  jsou stabilní a centrální směry. Potom nechť  $\varphi(t) := \sum_{i=1}^j |z_i|^2$  a  $\psi(t) := \sum_{i=j+1}^n |w_i|^2$ . Můžeme psát  $\varphi(t) = \sum_{i=1}^j z_i \bar{z}_i$  a analogicky pro  $w_i$ . Implicitně zde předpokládáme závislost na čase. Dále definujeme  $Z := \{(z, w) \in \mathbb{R}^n : \varphi(t) \geq \psi(t)\}$ .

Nechť  $\lambda_0 := \min\{\Re \lambda; \lambda \in \sigma(A), \Re \lambda > 0\}$ . Vezmeme  $\eta = \frac{\lambda_0}{6}$  a  $\delta > 0$  takové, aby  $\|\tilde{g}(y)\| \leq \eta\|y\|$  pro všechna  $y \in B_\delta$ . Dále definujeme  $K := Z \cap \overline{B_\delta}$ .

Uvažujme řešení  $y(t) = (z(t), w(t))$ , pro které budeme odhadovat. Ukážeme, že platí, že pokud  $\varphi(t_1) - \psi(t_1) > 0$ , potom  $\varphi(t) - \psi(t) > 0$  pro všechna  $t > t_1$ , dokud jsme v  $B_\delta$ . Ukážeme, že  $(\varphi(t) - \psi(t))' > 0$ .

Můžeme psát

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^j z_i \bar{z}_i = \sum_{i=1}^j z_i'(t) \bar{z}_i(t) + z_i(t) \bar{z}_i'(t) = \sum_{i=1}^j 2\Re z_i z_i' \\ &= 2\Re \left( \sum_{i=1}^j z_i \lambda_i z_i + \left( \sum_{i=1}^j z_i \mu z_{i+1} \right) + \sum_{i=1}^j z_i \tilde{g}_i(z, w) \right). \end{aligned}$$

Z toho máme, že

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^j 2\Re \bar{\lambda}_i |z_i|^2 + 2\Re \sum_{i=1}^j z_i \mu \bar{z}_{i+1} + 2\Re \sum_{i=1}^j z_i \tilde{g}_i(z, w) \\ &\geq 2\lambda_0 \sum_{i=1}^j |z_i|^2 - \left| 2\Re \sum_{i=1}^j z_i \mu \bar{z}_{i+1} \right| - \left| 2\Re \sum_{i=1}^j z_i \tilde{g}_i(z, w) \right|. \end{aligned}$$

Dále platí (AG-nerovnost)

$$\left| \sum_{i=1}^j \eta z_i \bar{z}_{i+1} \right| \leq \sum_{j=1}^i \eta \frac{1}{2} (|z_i|^2 + |z_{i+1}|^2) \leq \eta \frac{1}{2} (\varphi(t) + \varphi(t)) = \eta \varphi(t)$$

a také

$$\left| \sum_{i=1}^j z_i \overline{\tilde{g}_i(z, w)} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j (|z_i|^2 \eta + \frac{1}{\eta} |\tilde{g}_i(z, w)|^2) = \frac{1}{2} \eta \varphi(t) + \eta \varphi(t),$$

neboť  $\sum |g_i|^2 = |g(y)|^2 < \eta^2 |y|^2 \leq 2\eta^2 |z|^2 = 2\eta^2 \varphi(t)$ .

Celkově tedy máme, že  $\varphi'(t) \geq (2\lambda_0 - 2\eta - 3\eta)\varphi(t) \geq 7\eta\varphi(t)$ , jelikož  $\lambda_0 > 3\eta$ . Obdobně budeme postupovat s odhadem pro  $\psi'(t)$ . Můžeme psát

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= 2\Re \sum_{i=j+1}^n w_i \bar{w}'_i = 2\Re \sum_{i=j+1}^n w_i (\lambda_i w_i + \eta w_{i+1} + \bar{g}_i(z, w)) \\ &= 2\Re \left( \lambda_i \sum_{i=j+1}^n |w_i|^2 + \sum_{i=j+1}^n w_i \eta \bar{w}_{i+1} + \sum_{i=j+1}^n w_i \bar{g}_i(z, w) \right) \\ &\leq 2\eta \frac{1}{2} \left( \sum_{i=j+1}^n (|w_i|^2 + |w_{i+1}|^2) + \sum_{i=j+1}^n \left( |w_i|^2 \eta + \frac{1}{\eta} |\bar{g}_i^2(z, w)| \right) \right) \\ &\leq 2\eta\psi(t) + \eta\psi(t) + 2\eta\varphi(t) \leq 5\eta\varphi(t),\end{aligned}$$

přičemž v poslední nerovnosti jsme využili faktu, že  $\psi(t) < \varphi(t)$ . Z těchto dvou právě dokázaných nerovností již plyne  $\varphi'(t) - \psi'(t) \geq 2\eta\varphi(t) > 0$ .

Z nerovnosti pro  $\varphi'(t)$  platí  $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \geq 7\eta$ . Zintegrováním dostaneme následující nerovnost pro funkci  $\varphi$ :

$$\varphi(t) \geq e^{7\eta(t-t_0)} \varphi(t_0).$$

Nechť  $y(0) = (z(0), w(0)) \in K$ . Potom existuje  $T > 0$  takové, že platí nerovnost  $e^{7\eta(T-t_0)} \|\varphi_z(t_0)\|^2 > \delta^2$ . Uvažujme kompakt  $C := K \times [t_0, T + \varepsilon]$ . Naše řešení  $y$  tento kompakt opustí. Buď  $t_1 = \inf\{t \geq t_0; (y(t), t) \in C\}$ .

Pak  $t_1 < T + \varepsilon$ . Skutečně, nechť  $t_1 \geq T + \varepsilon$ , potom  $\|y(t_1)\|^2 \geq \varphi_z(t_1) \geq e^{7\eta(t_1-t_0)} \varphi_z(t_0) > \delta^2$ . To je spor s předpokladem, že  $t_1$  je infimum. Jistě platí  $y(t_0) \in \delta K$ . Funkce  $\varphi - \psi$  je rostoucí, tedy  $\varphi(t_0) - \psi(t_0) \geq \varphi(0) - \psi(0)$ . Z toho již plyne, že  $|y(t_0)| = \delta$ . Dostali jsme, že řešení  $y$  opustí otevřenou kouli o poloměru  $\delta$ , což je přesně to, co jsme chtěli dokázat v této větě.  $\square$

*konec 9. přednášky (25.4.2025)*

Na závěr této kapitoly si uvedeme jednu větu bez důkazu, která se hodí k vyšetřování stability na okolí stacionárních bodů.

**Věta 7.7** (Hartman-Grobman). *Uvažujme autonomní rovnici  $x' = f(x)$ . Nechť  $x_0$  je hyperbolický stacionární bod této rovnice (tedy  $\sigma(\nabla f(x_0)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ ). Pak existuje okolí  $U$  bodu  $x_0$  a okolí  $V$  bodu  $0 \in \mathbb{R}^n$  a homeomorfismus  $\phi : U \rightarrow V$  při kterém se řešení rovnice  $x' = f(x)$  zobrazí na řešení rovnice  $x' = Ax$ , kde  $A = \nabla f(x_0)$ .*



## 8 První integrál

V celé této kapitole budeme uvažovat autonomní rovnici

$$x' = f(x) \quad (7)$$

pro  $f$  spojitou a lokálně lipschitzovskou.

**Definice 8.1.** Funkci  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme *prvním integrálem* rovnice (7), jestliže  $U \in C^1(\Omega)$  a je nekonstantní a zároveň  $t \mapsto U(x(t))$  je konstantní pro každé řešení  $x$  dané rovnice v  $\Omega$ .

Například, máme-li rovnici  $x'' + kx = 0$  (lze pomocí ní popsat kmitání pružiny s hybností  $k > 0$ ), funkce  $V(x', x) = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{k}{2}x^2$  je jejím prvním integrálem, neboť tato funkce je zřejmě hladká a nekonstantní a

$$\frac{d}{dt}V(x'(t), x(t)) = x' \cdot x'' + kxx' = x'(x'' + kx) = 0.$$

**Věta 8.2** (Charakterizace prvních integrálů pomocí orbitálních derivací). *Bud'  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  otevřená,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  spojitá a  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je třídy  $C^1$ . Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) *Pro všechna řešení  $x$  rovnice (7) je  $t \mapsto U(x(t))$  konstantní;*
- (ii)  *$\nabla U(\xi)f(\xi) = 0$  pro všechna  $\xi \in \Omega$ .*

*Důkaz.* (ii)  $\implies$  (i): Přímým výpočtem dostaneme  $\frac{d}{dt}U(x, t) = \nabla U(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla U(x(t))f(x(t)) = 0$ .

(i)  $\implies$  (ii): Mějme bod  $\xi \in \Omega$ . Dle Peanovy věty (Věta 1.6) bodem  $\xi$  prochází nějaké řešení  $x$  takové, že  $x(0) = \xi$ . Z toho již dostáváme, že  $\nabla U(\xi) \cdot f(\xi) = \frac{d}{dt}U(x(t))|_{t=0} = 0$ .  $\square$

**Definice 8.3.** První integrály  $U_1, \dots, U_k$  jsou *lineárně nezávislé* v bodě  $x_0$ , jestliže matice  $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{i=1, \dots, k}^{j=1, \dots, n}$  má v tomto bodě hodnotu  $k$ .

Je dobré si uvědomit, že prvních integrálů, které jsou lineárně nezávislé v bodě  $x_0$ , může být nejvýše  $n - 1$ , což plyne z Věty 8.2, a to tak, že pro každý první integrál platí  $\nabla U_i(x_0) \perp f(x_0) \neq 0$  a v prostoru dimenze  $n$  existuje přesně  $n - 1$  lineárně nezávislých vektorů kolmých na daný vektor.

Metodu prvních integrálů budeme používat k redukci počtu rovnic v soustavách ODR. Skutečně, mějme soustavu

$$\begin{cases} x' = f(x, y); \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

a nechť  $V(x, y) = K$  je její první integrál. Ve většině případů z toho můžeme vyjádřit  $x$  jakožto funkci  $x = h(y, K)$ , což po dosazení do druhé rovnice nám dává

$$y' = g(h(y, K), y),$$

čímž jsme zredukovali počet rovnic na jednu. K přesné formulaci právě popsaného postupu použijeme následující větu.

**Věta 8.4** (O snížení řádu). *Nechť  $U_1, \dots, U_k$  jsou první integrály (7) lineárně nezávislé v bodě  $x_0$ . Potom řešení procházející bodem  $x_0$  lze lokálně popsat pomocí  $(n - k)$  rovnic  $z' = g(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $g : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ .*

*Důkaz.* Označme  $K_i = U_i(x_0)$  a  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : U_i(x) = K_i \text{ pro } i = 1, \dots, k\}$ . Víme, že  $\nabla U_1(x_0), \dots, \nabla U_k(x_0)$  jsou lineárně nezávislé vektory, to znamená, že matice  $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{i=1, \dots, k}^{j=1, \dots, n}$  má  $k$  lineárně nezávislých sloupců. Bez újmy na obecnosti nechť toto jsou sloupce  $1, \dots, k$ . Označme  $x = (x_1, \dots, x_k, y)$ , kde  $x \in \mathbb{R}^n$  a pro  $y \in \mathbb{R}^{n-k}$  platí  $y = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ .

Jelikož matice  $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{i=1, \dots, k}^{j=1, \dots, k}$  je regulární, díky větě o implicitních funkcích existují konstanty  $\delta, \Delta > 0$  takové, že pro každé  $y$  z  $\delta$ -okolí bodu  $x_0$  existuje právě jedna  $k$ -tice  $(x_1, \dots, x_k)$  z  $\Delta$ -okolí  $x_0$  (uvažujeme restrikcí na prvních  $k$  souřadnic) taková, že platí  $U_i(x_1, \dots, x_k, y) = K_i$  pro všechna  $i = 1, \dots, k$ . Pokud příslušnou  $k$ -tici označíme jako  $(\varphi_1(y), \dots, \varphi_k(y))$ , potom funkce  $\varphi$  je třídy  $C^1$ .

Z výše uvedeného dostáváme, že pokud  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  je řešení rovnice (7), potom pro  $i \geq k + 1$  platí

$$x'_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) = f_i(\varphi_1(y(t)), \dots, \varphi_k(y(t)), y(t)) =: \tilde{f}_i(y(t)).$$

Tímto jsme získali požadovanou soustavu rovnic

$$(x'_{k+1}, \dots, x'_n) = y' = \tilde{f}(y(t)), \tilde{f} : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}.$$

□

**Věta 8.5** (Existence lineárně nezávislých prvních integrálů). *Nechť  $f \in C^1(\Omega)$ ,  $f(x_0) \neq 0$ . Potom má rovnice  $x' = f(x)$  na okolí  $x_0$   $(n - 1)$  prvních integrálů, které jsou lineárně nezávislé v bodě  $x_0$ .*

Právě vybudovanou teorii můžeme využít k aplikaci takzvané metody charakteristik, což je matematický aparát, který nám umožňuje přecházet mezi autonomními ODR a jistou třídou lineárních parciálních diferenciálních rovnic (podrobnosti viz přednáška Úvod do parciálních diferenciálních rovnic<sup>1</sup>).

*konec 10. přednášky (2.5.2025)*

<sup>1</sup>pokud ji zrovna učí někdo přičetný

## 9 Ljapunovské funkce a stabilita

V této kapitule se pokusíme vybudovat pokročilejší teorii, která nám umožní určit stabilitu u většího počtu možných obyčejných diferenciálních rovnic. Budeme uvažovat evoluční rovnici (1)

$$x' = f(x, t),$$

kde  $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  a  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená. Bez újmy na obecnosti dále nechť  $f(0, t) = 0$  pro všechna  $t \in I$  a  $I = [0, +\infty)$ , neboli jinými slovy 0 je stacionární řešení této rovnice. Budeme zkoumat stabilitu tohoto nulového řešení.

**Definice 9.1.** Funkci  $\omega : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  nazveme *pozitivně definitní*, pokud je spojitá,  $\omega(0) = 0$  a  $\omega(x) > 0$  pro všechna  $x \in \Omega \setminus \{0\}$ .

Pozitivně definitní funkce jsou například  $f(x, y) = x^2 + y^2$  nebo  $g(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^{2k_i}$  pro  $k_i \in \mathbb{N}$  a  $a_i > 0$ .

**Definice 9.2.** Funkci  $V(x, t) : \Omega \times I \rightarrow [0, +\infty)$  nazveme *ljapunovskou* pro (1) v  $\Omega$ , jestliže

- (i)  $V$  je spojitá a  $V(0, t) = 0$  pro všechna  $t \in I$ ;
- (ii)  $t \mapsto V(x(t), t)$  je nerostoucí pro každé řešení  $x$  rovnice (1);
- (iii) existuje pozitivně definitní funkce  $\omega$  v  $\Omega$  taková, že  $V(x, t) \geq \omega(x)$  pro všechna  $x \in \Omega$  a  $t \in I$ .

V některých případech první integrál může být kandidátem na ljapunovskou funkci, ale ne vždy to tak vyjde. Dále, je-li  $V$  třídy  $C^1$ , je podmínka (ii) ekvivalentní nekladnosti orbitální derivace

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \nabla_x V(x, t) \cdot f(x, t) \leq 0$$

pro všechna  $(x, t) \in \Omega \times I$ . Důkaz je analogický důkazu Věty 8.2.

**Věta 9.3** (Ljapunovská funkce a stabilita). *Nechť (1) má ljapunovskou funkci pro bod 0, pak nulové řešení je stabilní.*

*Důkaz.* Volme  $\varepsilon > 0$  a chceme najít  $\delta > 0$  tak, aby  $|x_0| < \delta$  implikovalo  $|x(t)| < \varepsilon$  v každém čase  $t \geq 0$ . Bez újmy na obecnosti nechť  $\overline{U(0, \varepsilon)} \subset \Omega$ . Dále budeme uvažovat ljapunovskou funkci  $V$  a příslušnou pozitivně definitní funkci  $\omega$  (takovou, že  $V(x, t) \geq \omega(x)$  pro každé  $x \in \Omega$ ).

Na sféře  $S_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \varepsilon\}$  je funkce  $\omega$  kladná a spojitá a  $S_\varepsilon$  je kompaktní, tedy  $\omega$  nabývá na  $S_\varepsilon$  svého minima  $\alpha > 0$  v nějakém bodě  $\xi \in S_\varepsilon$ .

Máme, že  $\omega(x) \geq \alpha$  pro všechna  $x \in S_\varepsilon$  a chceme, aby  $V(x_0, t_0) < \alpha$ . Pro dané  $t_0$  je  $V(\cdot, t_0)$  spojitá a  $V(0, t_0) = 0$ . Díky tomu existuje  $\delta > 0$ ,  $\delta < \varepsilon$  takové, že  $V(x, t_0) < \alpha$  na  $U(0, \delta)$ .

Nechť nyní  $x_0 \in U(0, \delta)$ , tedy  $V(x_0, t_0) < \alpha$ , a tedy  $V(x(t), t) \leq V(x_0, t_0) < \alpha$  pro všechna  $t \geq t_0$ . Pro spor předpokládejme, že existuje čas  $t_1$  takový, že  $|x(t_1)| \geq \varepsilon$ , ale pak by díky spojitosti musel existovat čas  $t_2$  takový, že  $|x(t_2)| = \varepsilon$ , tedy  $x(t_2) \in S_\varepsilon$ , ale  $V(x(t_2), t_2) \geq \omega(x(t_2)) \geq \alpha$ , což je spor s volbou vhodného  $\delta$ .  $\square$

**Věta 9.4** (Ljapunovská funkce a asymptotická stabilita). *Nechť rovnice (1) má v  $\Omega \times I$  Ljapunovskou funkci  $V$ . Nechť navíc existují v  $\Omega$  pozitivně definitní funkce  $\lambda$  a  $\eta$  takové, že*

$$(i) \quad V(x, t) \leq \lambda(x) \text{ pro každé } (x, t) \in \Omega \times I,$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt}V(x(t), t) \leq -\eta(x(t)), \text{ kdykoli } x \text{ řeší (1) v } \Omega.$$

*Potom 0 je asymptoticky stabilní v  $I$ .*

K důkazu této věty budeme potřebovat následující lemma o zachovávání konvergence při aplikaci pozitivně definitní funkce (poznamenejme si, že opačná implikace platí také díky větě o limitě složené funkce).

**Lemma 9.5.** *Nechť  $\omega$  je pozitivně definitní v  $\Omega$  a  $\varepsilon > 0$  je takové, že  $\overline{U(0, \varepsilon)} \subset \Omega$ . Bud'  $(x_n)_{n=1}^\infty$  posloupnost v  $\overline{U(0, \varepsilon)}$  splňující  $\omega(x_n) \rightarrow 0$ . Potom  $x_n \rightarrow 0$ .*

*Důkaz.* Volme  $\tilde{\varepsilon} > 0$ ,  $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$  libovolně. Potom  $\overline{U(0, \varepsilon)} \setminus U(0, \tilde{\varepsilon})$  je kompaktní,  $\omega$  je spojitá, tedy zde nabývá svého minima  $\omega(x_0) > 0$ . Potom existuje  $n_0$  takové, že pro všechna  $n \geq n_0$  máme  $\omega(x_n) < \omega(x_0)$ , a tedy  $x_n \in U(0, \tilde{\varepsilon})$ .  $\square$

*Důkaz Věty 9.4.* Stabilitu jsme již dokázali ve Větě 9.3, stačí tedy dokázat, že počátek je lokální atraktor. Mějme  $\varepsilon > 0$ , k tomu ze stability nalezneme  $\delta > 0$  takové, že pro  $|x_0| < \delta$  máme  $|x(t)| < \varepsilon$  v každém čase  $t \geq 0$ .

Dále uvažujme  $x_0$  takové, že  $|x_0| < \delta$ . Funkce  $t \mapsto V(x(t), t)$  je neklesající a nezáporná, tedy existuje  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t), t) = a \geq 0$ . Dále platí

$$\int_{t_0}^t \eta(x(s)) ds \leq - \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} V(x(s), s) ds = V(x(t_0), t_0) - V(x(t), t),$$

pro  $t$  jdoucí do nekonečna dostáváme  $V(x(t_0), t_0) - V(x(t), t) \rightarrow V(x(t_0), t_0) - a$ , a tedy

$$\int_{t_0}^\infty \eta(x(s)) ds \leq V(x(t_0), t_0).$$

Jmenovitě tento integrál je konečný, a tedy existuje posloupnost  $t_n \nearrow +\infty$  taková, že  $\eta(x(t_n)) \rightarrow 0$  (pozor,  $\eta(x(t))$  samotná nemusí konvergovat k nule). Z právě dokázaného lemmatu dostáváme, že  $x(t_n) \rightarrow 0$ , z čehož díky spojitosti a pozitivní definitnosti funkce  $\lambda$  v 0 dostáváme  $\lambda(x(t_n)) \rightarrow 0$ .

Dále můžeme psát  $0 \leq V(x(t_n), t_n) \leq \lambda(x(t_n)) \rightarrow 0$ , a tedy  $V(x(t_n), t_n) \rightarrow 0$ . Díky větě o limitě podposloupnosti dostáváme, že  $V(x(t), t) \rightarrow 0 = a$  a jelikož  $0 \leq \omega(x(t)) \leq V(t, x(t)) \rightarrow 0$ , musí nutně platit  $\omega(x(t)) \rightarrow 0$ .

Jelikož posloupnost  $t_n$  byla volena libovolně, máme díky předchozímu lemmatu  $x(t_n) \rightarrow 0$  pro libovolnou  $t_n \nearrow +\infty$ , a tedy dle Heineovy věty  $x(t) \rightarrow 0$ , což jsme chtěli dokázat.  $\square$

Na závěr si uvedeme větu, která nám poskytuje několik možných charakterizací pro asymptotickou stabilitu nulového řešení.

**Věta 9.6** (Ekvivalentní podmínky pro rovnici (6)). *Je dána rovnice  $x' = Ax$ , kde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Následující výroky jsou ekvivalentní:*

- (i) 0 je asymptoticky stabilní v  $[0, +\infty)$ ;
- (ii)  $\Re \lambda < 0$  pro všechna  $\lambda \in \sigma(A)$ , neboli  $A$  je hurwitzovská;
- (iii) existují  $\alpha, c > 0$  taková, že  $\|e^{tA}\| \leq ce^{-\alpha t}$  pro všechna  $t \geq 0$ ;
- (iv) existuje symetrická pozitivně definitní matice  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  taková, že

$$A^T B + BA = -I.$$

*Důkaz.* Ekvivalence mezi body (i), (ii) a (iii) byla již dokázána ve Větech 7.3, 7.2 (iv) a větách o tvaru maticové exponenciály.

Dokážeme, že z (iii) plyne (iv). Definujeme  $B := \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} dt$ . Platí  $e^{tA^T} = (e^{tA})^T$ ,  $(A^T)^k = (A^k)^T$ , proto

$$e^{tA^T} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (A^T)^k = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right)^T.$$

Dále pro  $\alpha > 0$  z vlastnosti (iii) můžeme psát  $\|e^{tA^T}\| = \|e^{tA}\| \leq ce^{-\alpha t}$ , proto

$$\|e^{tA^T} e^{tA}\| \leq ce^{-\alpha t} \cdot ce^{-\alpha t} = c^2 e^{-2\alpha t},$$

tedy integrál v definici matice  $B$  je dobře definovaný.

Ukážeme, že  $B$  je symetrická a pozitivně definitní. Platí

$$\begin{aligned} B^T &= \left( \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} dt \right)^T = \int_0^\infty (e^{tA^T} e^{tA})^T dt = \\ &= \int_0^\infty (e^{tA})^T (e^{tA^T})^T dt = \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} dt = B. \end{aligned}$$

Dále  $B$  splňuje

$$\begin{aligned} \langle Bx, x \rangle &= \left\langle \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} dt x, x \right\rangle = \int_0^\infty \langle e^{tA^T} e^{tA} x, x \rangle dt \\ &= \int_0^\infty \langle e^{tA} x, e^{tA} x \rangle dt = \int_0^\infty \|e^{tA} x\|^2 dt > 0, \end{aligned}$$

kde kladnost tohoto výrazu plyne z toho, že  $\|e^{tA} x\|$  je nenulové pro  $x \neq 0$ .

Zbývá dokázat, že  $B$  splňuje rovnost  $A^T B + BA = -I$ . Skutečně, můžeme psát

$$\begin{aligned} A^T B &= A^T \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{tA^T} e^{tA} dt \stackrel{\text{per partes}}{=} \left[ e^{tA^T} e^{tA} \right]_0^\infty \\ &\quad - \int_0^\infty e^{tA^T} \frac{d}{dt} e^{tA} dt = 0 - I - \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} dt A = -I - BA. \end{aligned}$$

Pro důkaz implikace (iv)  $\implies$  (i), ukážeme, že  $V(x, t) := \langle Bx, x \rangle$  je lja-punovská funkce splňující podmínku z Věty 9.4. Jelikož chceme, aby platilo

$\omega(x) \leq V(x, t) \leq \lambda(x)$ , stačí volit  $\lambda(x) = \omega(x) = \langle Bx, x \rangle$ . Nalezneme vhodnou funkci  $\eta$  tak, aby  $\frac{d}{dt}V(x(t), t) \leq -\eta(x)$ . Díky vlastnostem skalárního součinu platí

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle Bx(t), x(t) \rangle &= \langle Bx'(t), x(t) \rangle + \langle Bx(t), x'(t) \rangle = \\ &= \langle BAx(t), x(t) \rangle + \langle Bx(t), Ax(t) \rangle = \\ &= \langle (BA + A^T B)x(t), x(t) \rangle = -\|x(t)\|^2. \end{aligned}$$

Stačí tedy volit  $\eta(x) = \|x\|^2$ , a tedy dle výše zmíněné Věty 9.4 je naše úloha asymptoticky stabilní.  $\square$

Poslední rovnosti se běžně říká *Ljapunovova rovnice*. Dále z bodu (iv) plyne, že  $V(x) = x \cdot Bx$  je Ljapunovskou funkcí rovnice  $x' = Ax$ , pomocí níž můžeme sepsat alternativní důkaz věty o linearizované stabilitě (Věta 7.5).

*konec 11. přednášky (9.5.2025)*

## 10 Floquetova teorie

V této kapitole se budeme zabývat lineární rovnicí

$$x' = A(t)x + b(t) \quad (8)$$

a příslušnou homogenní rovnicí

$$x' = A(t)x \quad (9)$$

pro  $T$ -periodické funkce  $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$  a  $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ . Budeme zkoumat periodicitu a stabilitu řešení této rovnice.

**Pozorování 10.1.** (i) Pro každou počáteční podmínku  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  existuje právě jedno maximální řešení obou těchto rovnic a to je definované na celém  $\mathbb{R}$ .

(ii) Buď  $x$  řešení (8) a definujeme  $y(t) := x(t + T)$ . Potom  $y$  je také řešení dané rovnice. Skutečně, platí

$$y'(t) = x'(t + T) = A(t + T)x(t + T) + b(t + T) = A(t)y(t) + b(t).$$

(iii) Řešení  $x$  je  $T$ -periodické právě tehdy, když  $x(T) = x(0)$ . Implikace  $\implies$  je triviální, pro důkaz té opačné můžeme definovat  $y(t) := x(t + T)$ , což je díky již dokázanému také řešení a  $y(0) = x(T) = x(0)$ . Z jednoznačnosti řešení se tyto dvě řešení musí rovnat, tedy máme  $x(t) = y(t) = x(t + T)$  pro všechna  $t$ .

(iv) Nechť  $\Phi$  je fundamentální matice (9) taková, že  $\Phi(0) = I$ . Potom řešení  $x$  rovnice (9) je periodické právě tehdy když  $\Phi(T)x_0 = x_0$ , jinými slovy,  $x_0$  je vlastní vektor matice  $\Phi(T)$  příslušný vlastnímu číslu 1.

**Definice 10.2.** Nechť  $\Phi$  je fundamentální matice (9) taková, že  $\Phi(0) = I$ . Pak matici  $C = \Phi(T)$  nazveme *maticí monodromie*.

Dle předchozího pozorování není těžké zpozorovat, že počet periodických řešení naší úlohy úzce souvisí s dimenzí jádra matice  $C - I$ , tedy násobností vlastního čísla 1 matice  $C$ .

**Lemma 10.3** (Maticový logaritmus). Nechť  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je regulární. Pak existuje matice  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  splňující  $e^B = A$ . Tato matice  $B$  nemusí být určena jednoznačně.

Ústřední větou celé Floquetovy teorie je následující věta, která nám umožňuje jistým způsobem charakterizovat chování fundamentální matice pro rovnici (9).

**Věta 10.4** (Floquet). Existuje  $Q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$   $T$ -periodická,  $Q(t)$  regulární pro všechna  $t \in \mathbb{R}$  a  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tak, že

$$\Phi(t) = Q(t)e^{tB} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Zde  $\Phi(t)$  je fundamentální matice úlohy (9) taková, že  $\Phi(0) = I$ .

*Důkaz.* Necht  $C = \Phi(T)$  je matice monodromie. Z Lemmatu 10.3 nalezneme komplexní matici  $\tilde{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  takovou, že  $e^{\tilde{B}} = C$  a položíme  $B = \frac{1}{T}\tilde{B}$  (tedy  $e^{T \cdot B} = C$  z vlastností exponenciály).

Definujeme  $Q(t) := \Phi(t)e^{-tB}$ . Tato matice je regulární, spojitá a splňuje  $\Phi(t) = Q(t)e^{tB}$ . Dokážeme, že je  $T$ -periodická. K tomu budeme potřebovat funkci  $\Psi(t) := \Phi(t+T)$ . Platí

$$\Psi'(t) = \Phi'(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Phi(t),$$

tedy  $\Psi$  je taky fundamentální matice a platí  $\Psi(0) = \Phi(0) = C$ . Zároveň také  $\Phi(t)C$  je fundamentální maticí (9) a  $\Phi(0)C = C$ . Z jednoznačnosti dostáváme, že  $\Psi(t) = \Phi(t)C$  pro všechna  $t \in \mathbb{R}$ . Nakonec

$$Q(t+T) = \Phi(t+T)e^{-(t+T)B} = \Psi(t)e^{-TB}e^{-tB} = \Phi(t)CC^{-1}e^{-tB} = Q(t),$$

čímž je důkaz ukončen.  $\square$

Floquetova transformace  $y(t) = Q^{-1}(t)x(t)$  převádí řešení (9) na řešení úlohy  $y' = By$ , což je rovnice s konstantními koeficienty. Platí

$$y(t) = Q^{-1}(t)\Phi(t)x_0 = Q^{-1}(t)Q(t)e^{tB}x_0 = e^{tB}x_0.$$

Položíme-li  $t = kT + s$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$  a  $s \in [0, T)$ , pak

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x_0 = Q(t)e^{tB}x_0 = Q(s)e^{(kT+s)B}x_0 = \\ &= Q(s)e^{sB}(e^{TB})^k x_0 = \Phi(s)C^k x_0. \end{aligned}$$

Matici  $C^k$  můžeme relativně snadno spočítat pomocí převodu na Jordanův kanonický tvar, což v praxi často výrazně zjednodušuje výpočty.

**Důsledek 10.5.** *Pokud pro spektrum matice monodromie platí  $\sigma(C) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , pak máme asymptotickou stabilitu.*

**Věta 10.6** (Existence periodických řešení). *Necht matice  $A(t)$  je spojitá a  $T$ -periodická. Potom je ekvivalentní:*

- (i) rovnice (8) (nehomogenní) má právě jedno  $T$ -periodické řešení pro každou  $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$   $T$ -periodickou;
- (ii) rovnice (9) (homogenní) má pouze triviální  $T$ -periodické řešení;
- (iii)  $1 \notin \sigma(C)$ .

*Důkaz.* (ii)  $\iff$  (iii):  $x$  je netriviální  $T$ -periodické řešení právě tehdy, když  $x(T) = x(0)$ , což nastane právě tehdy, když  $Cx_0 = x_0$ , tedy 1 je vlastní číslo matice  $C$ .

(i)  $\implies$  (ii): Předpokládejme, že  $x$  je  $T$ -periodické řešení (8) a pro spor předpokládejme, že  $y$  je netriviální  $T$ -periodické řešení homogenní rovnice, tedy  $x+y$  je  $T$ -periodické řešení (8), ale  $x+y \neq x$ , což je spor s jednoznačností řešení nehomogenní úlohy.



(iii)  $\implies$  (i): Řešení nehomogenní úlohy můžeme explicitně zapsat ve tvaru  $x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s)ds$ . Dokážeme, že toto je jediné  $T$ -periodické řešení úlohy (8). Můžeme psát  $x(T) = Cx_0 + y$ , kde  $y = \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)b(s)ds$ , tedy  $x(T) = x_0$  právě tehdy, když  $-y = (C - I)x_0$ . Dle předpokladu v (iii) je matice  $C - I$  regulární, tedy existuje právě jedno  $x_0$  splňující danou podmínku, proto  $T$ -periodické řešení (8) je určeno jednoznačně.  $\square$

**Důsledek 10.7** (Stabilita pro periodické lineární rovnice). *Nulové řešení (9) je (asymptoticky) stabilní, právě když nulové řešení  $y' = By$  je (asymptoticky) stabilní.*

*Důkaz.* Z Floquetovy věty (Věta 10.4) a poznámky o Floquetově transformaci víme, že  $x(t) = Q(t)e^{tB}x_0 = Q(t)y(t)$ . Potom

$$\|x(t)\| \leq \|Q(t)\|\|y(t)\| \leq \max_{t \in [0, T]} \|Q(t)\|\|y(t)\| = K\|y(t)\|$$

a obdobně

$$\|y(t)\| \leq \|Q^{-1}(t)\|\|x(t)\| \leq \tilde{K}\|x(t)\|.$$

$\square$

*konec 12. přednášky (16.5.2025)*