

Obyčejné diferenciální rovnice (NMMA336)

Petr Velička *

přednášející: doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D. †

LS 2024/25

*petrvel@matfyz.cz

†bart@karlin.mff.cuni.cz

1 Lokální existence řešení

Diferenciální rovnice nás doprovází v každé oblasti lidského života. Neexistuje obecná teorie, která by nám umožnila vyřešit všechny diferenciální rovnice najednou. Musíme se proto omezit jen na část rovnic.

Úmluva 1.1. V této přednášce budeme studovat systém rovnic

$$x' = f(x, t) \quad (1)$$

za trvalého předpokladu $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá.

Definice 1.2. Buď I otevřený interval. Funkci $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme *řešením* diferenciální rovnice (1) v Ω , jestliže pro všechna $t \in I$ platí

- (i) $(x(t), t) \in \Omega$,
- (ii) existuje vlastní $x'(t)$,
- (iii) $x'(t) = f(x(t), t)$.

Takto definované řešení je nutně spojitě a má spojitou derivaci (je třídy C^1), tzv. klasické řešení. Dále si poznamenejme, že platí tzv. princip nalepování: Pokud máme $x(t)$ řešení na (a, t_0) a na (t_0, b) , pak už je řešením na celém (a, b) . To plyne z toho, že $x'_-(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} x'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(x(t), t) = f(x(t_0), t_0)$, přičemž tatáž rovnost platí i pro derivaci zprava.

Lemma 1.3. *Nechť I je otevřený interval, $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá splňující $(x(t), t) \in \Omega$ pro každé $t \in I$ a nechť $t_0 \in I$. Potom je ekvivalentní*

- (i) x je řešení (1) splňující $x(t_0) = x_0$,
- (ii) pro každé $t \in I$ platí $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$.

Důkaz. Víme, že platí $x'(s) = f(x(s), s)$ pro všechna $s \in I$, což je spojitá funkce, kterou můžeme zintegrovat na $[t_0, t]$. Potom z Newtonova-Leibnizova vzorce máme $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$. Tedy $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$.

Pro důkaz opačné strany si uvědomíme, že pro každé $t \in I$ je pravá strana diferencovatelná, tedy $x'(t) = f(x(t), t)$ a po dosazení $t = t_0$ dostáváme $x(t_0) = x_0$. \square

Teď si zadefinujeme několik pojmů, které charakterizují množiny funkcí, které se chovají jistým způsobem podobně nebo stejně.

Definice 1.4. Řekneme, že funkce množiny $M \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ jsou

1. *stejně spojitě*, jestliže pro každé $x \in K$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ pro všechna $y \in (x - \delta, x + \delta)$ a všechny $f \in M$.

2. *stejně omezené*, jestliže existuje $C > 0$ takové, že $\|f\| \leq C$ pro všechna $f \in M$.

Věta 1.5 (Arzela-Ascoli). *Nechť funkce $x_n(t)$ jsou stejně omezené a stejně spojitě na $[0, T]$. Potom z nich lze vybrat stejnoměrně konvergující posloupnost. (bez důkazu)*

Následující věta nám říká, že na nějakém okolí libovolného bodu existuje řešení zkoumané diferenciální rovnice.

Věta 1.6 (Peano). *Nechť $(x_0, t_0) \in \Omega$. Pak existuje $\delta > 0$ a funkce $x(t) : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, která je řešením (1) a splňuje $x(t_0) = x_0$.*

K důkazu této věty budeme potřebovat pomocné lemma:

Lemma 1.7. *Pokud $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ a f je omezená na Ω , pak pro každé $T > 0$ existuje řešení (1) na $(t_0 - T, t_0 + T)$ splňující $x(t_0) = x_0$.*

Důkaz. Řešme “porušenou” úlohu $P_\lambda: x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \lambda), s) ds$ pro $t > t_0$ a $x(t) = x_0$ pro $t \in [t_0 - \lambda, t_0]$. Na $I_1 := (t_0, t_0 + \lambda]$ definujeme $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \lambda), s) ds$. Na $I_2 := (t_0 + \lambda, t_0 + 2\lambda]$ definujeme $x(t)$ obdobně a indukci pokračujeme dokud $t_0 + k\lambda$ nebude větší než T . Tímto je “porušená” úloha vyřešena na $[t_0 - \lambda, t_0 + T]$.

Položme $\lambda = \frac{1}{n}$ pro $n = 1, 2, \dots$. Pišme dále jen x_n namísto $x_{1/n}$, tedy řešení úloh $P_{\frac{1}{n}}$ tvoří posloupnost funkcí. Ukážeme, že jsou stejně spojitě a stejně omezené. Stejná omezenost plyne z toho, že $\|x_n(t)\| = \|x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s) ds\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|f(x(s - \frac{1}{n}), s)\| ds$. Ale funkce f je omezená, tedy máme $\|x_n(t)\| \leq \|x_0\| + (T - t_0) \cdot K$, kde K je příslušná konstanta omezenosti f . Stejnou spojitost máme z odhadu $\|x_n(t) - x_n(r)\| = \|\int_r^t f(x(s - \frac{1}{n}), s) ds\| \leq |t - r| \cdot K$. V poslední nerovnosti jsme odhadli integrál součinem délky intervalu a konstantou omezenosti funkce f . Stačí položit $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, potom $\|x_n(t) - x_r(t)\| < \delta K = \varepsilon$.

Tedy dle Věty 1.5 můžeme z posloupnosti x_n vybrat stejnoměrně konvergentní podposloupnost x_{n_k} . Zbývá dokázat, že její limita řeší naši rovnici.

konec 1. přednášky (21.2.2025)

Zřejmě pro $k \rightarrow \infty$ platí $x_{n_k} \rightarrow x(t)$ a pokud $\int_{t_0}^t f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) ds$ konverguje k $\int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s) ds$, máme hotovo. Tato vlastnost plyne z toho, že $\|\int_{t_0}^t f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s), s) ds\| \leq \int_{t_0}^t \|f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s - \frac{1}{n_k}), s)\| + \|f(x(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s), s)\| ds$.

Jelikož f je spojitá, musí být stejnoměrně spojitá na kompaktní množině $[t_0, t_0 + T] \times \overline{B(0, r) \cap \Omega}$, jinými slovy platí, že pro $\varepsilon > 0$ existuje δ takové, že pro každé dva body x, y takové, že $\|x - y\| < \delta$ máme, že $f(x, s) - f(y, \hat{s}) < \varepsilon$.

Ze stejnoměrné konvergence x_{n_k} máme, že pro $\delta > 0$ existuje k_0 takové, že pro všechna $k \geq k_0$ platí $\|x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}) - x(s - \frac{1}{n_k})\| < \delta$.

Jelikož x je spojitá, na kompaktním intervalu $[t_0, t_0 + T]$ je také stejnoměrně spojitá. Potom pro $\delta > 0$ existuje k_1 takové, že pro všechna $k \geq k_1$ platí $\|x(s - \frac{1}{n_k}) - x(s)\| < \delta$.

Potom pro všechna $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ platí, že náš integrál je menší nebo roven $\int_{t_0}^t \varepsilon + \varepsilon ds \leq T \cdot 2\varepsilon$, tedy jsme opravdu našli požadované řešení.

Existence řešení na $[t_0 - T, t_0]$ se ukáže podobně. \square

Důkaz Věty 1.6. Uvažujme dvě koule kolem bodu (x_0, t_0) takové, že $K_1 \subset K_2 \subset$

$$\Omega. \text{ Definujeme } \tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t) & \text{v } K_1, \\ \text{spojitě v } K_2 \setminus K_1 & \\ 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus K_2 \end{cases}.$$

Z Lemmatu 1.7 máme, že rovnice $x' = \tilde{f}(x, t)$ má řešení x splňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$. Nazveme toto řešení \tilde{x} . Potom ze spojitosti \tilde{x} . Tedy existuje $\delta > 0$ takové, že graf \tilde{x} na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ leží v K_1 . Restrikce \tilde{x} na tento interval nám tedy dává řešení původní rovnice. \square

2 Jednoznačnost řešení

V této kapitole se budeme věnovat otázce jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic. V praxi to často požadujeme, například proto, aby nějaká simulace byla deterministická.

Definice 2.1. Řekneme, že rovnice (1) má v Ω vlastnost *globální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení $(x, I), (y, J)$ splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cup J$, potom $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in I \cup J$. Řekneme, že rovnice (1) má v Ω vlastnost *lokální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení $(x, I), (y, J)$ splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cup J$, potom existuje δ takové, že $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Věta 2.2. *Rovnice (1) má v Ω vlastnost globální jednoznačnosti právě tehdy, když má vlastnost lokální jednoznačnosti.*

Důkaz. Implikace směrem doprava je triviální (funkce, které se rovnají na celé množině se nutně musí rovnat i na nějakém okolí zkoumaného bodu).

Pro důkaz opačné implikace necht' máme dvě řešení $(x, I), (y, J)$ splňující $x(t_0) = y(t_0) = x_0$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$. Bez újmy na obecnosti necht' $I \cup J = (a, b)$. Položme $M = \{t : x(t) = y(t)\}$. Tato množina je díky předpokladu neprázdná, necht' $c := \sup M$.

Pro spor předpokládejme, že $c < b$. Potom platí $x(c) = \lim_{t \rightarrow c^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow c^-} y(t)$, což se díky spojitosti y rovná $y(c)$. Tedy c je maximum M . Ale díky lokální jednoznačnosti existuje okolí $(c, x(c))$, na kterém platí $x = y$. Tedy $x(c + \delta) = y(c + \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$, což je spor s tím, že $c = \sup M$. \square

Definice 2.3. Funkce f se nazývá *lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω* , jestliže pro každé $(x_0, t_0) \in \Omega$ existují L a $\delta > 0$ takové, že

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|$$

pro všechna $(x, t), (y, t) \in U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Věta 2.4. *Necht' f je lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω . Potom rovnice (1) má v Ω vlastnost lokální jednoznačnosti.*

Důkaz. Volme $(x_0, t_0) \in \Omega$ a dvě řešení $(x, I), (y, J)$ taková, že $y(t_0) = x(t_0) = x_0$. Vezmeme $\delta_1 > 0$ tak, aby f byla lipschitzovská na δ_1 -okolí (x_0, t_0) . Necht' $\delta \leq \frac{1}{2L}$ je takové, že navíc $\delta < \delta_1$ a t takové, aby $(x(t), t), (y(t), t) \in U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Potom platí

$$\|x(t) - y(t)\| = \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds - \left(x_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds \right) \right\| \leq$$

$$\left| \int_{t_0}^t \|f(x(s), s) - f(y(s), s)\| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\| ds \right| \leq L \cdot \gamma \cdot \delta \leq \frac{\gamma}{2}$$

pro $\gamma := \sup \|x(s) - y(s)\|$. To platí pro všechna t , tedy $\gamma = \sup \|x(t) - y(t)\| \leq \frac{\gamma}{2}$, z čehož plyne $\gamma = 0$, což implikuje rovnost $x(t)$ a $y(t)$. \square

Zavedeme značení $f \in C_x^1(\Omega)$, jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existují a jsou spojité v Ω pro každé i .

Lemma 2.5. *Nechť $f \in C_x^1(\Omega)$. Potom f je lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω .*

Důkaz. Mějme $(x_0, t_0) \in \Omega$. Nechť $\delta > 0$ je takové, že množina

$$M = \overline{U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)}$$

je podmnožinou Ω . Z kompaktnosti M máme, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou omezené konstantou K .

Dále mějme dva body $(x, t), (y, t) \in M$. Potom $|f(x, t) - f(y, t)| = |f(x + 0(y - x), t) - f(x + 1(y - x)t)| = |[f(x + s(y - x), t)]_0^1| = |\int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + s(y - x), t) ds|$. Pro derivaci f platí $\frac{d}{ds} f(x + s(y - x), t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + s(y - x), t)(y_i - x_i)$. Z toho máme, že

$$\left| \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + s(y - x), t) ds \right| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n K |y_i - x_i| ds = \sum_{i=1}^n K \max_i |y_i - x_i| =$$

$$nK \max |y_i - x_i| \leq nK |y - x|,$$

kde poslední nerovnost plyne z faktu, že $|y - x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2}$.

Tedy f je lokálně Lipschitzovská s konstantou $n \cdot K$. □

Rule of thumb (just for fun): platí f spojitá \Rightarrow existuje řešení, $f \in C^1 \Rightarrow$ řešení je určeno jednoznačně.

konec 2. přednášky (28.2.2025)

3 Maximální řešení

V této kapitole se budeme věnovat otázce rozšíření řešení na co největší podmnožinu prostoru, v němž toto řešení hledáme. Bez újmy na obecnosti budeme dále předpokládat, že f je spojitá (ne nutně lipschitzovská) na Ω (což znamená, že nutně nemusíme mít jednoznačnost řešení).

Definice 3.1. Řešení (\hat{x}, \hat{I}) diferenciální rovnice (1) nazýváme *prodloužením* řešení (x, I) , jestliže $\hat{I} \supset I$ a $\hat{x}(t) = x(t)$ pro každé $t \in I$. Řešení (x, I) se nazve *maximální*, jestliže nemá žádné netriviální $(\hat{I} \supsetneq I)$ prodloužení.

Věta 3.2. Každé řešení rovnice (1) má alespoň jedno maximální prodloužení.

Důkaz. Mějme řešení (x, I) takové, že $I = (a, b)$. Budeme induktivně prodloužovat za bod b (na druhou stranu se to pak udělá analogicky). Položme $x_0 = x$, $b_0 = b$, $I_0 = I$. V n -tém kroku dostaneme řešení (x_n, I_n) , kde $I_n = (a, b_n)$. Dále definujeme $\omega_n = \sup\{z > b_n; (x_n, I_n) \text{ lze prodloužit na } (a, z)\}$. Pokud příslušná množina je prázdná, jsme hotovi, neboť řešení již nejde prodloužit, tedy je maximální.

V opačném případě můžeme definovat $b_{n+1} = \frac{b_n + \omega_n}{2}$ (pokud $\omega_n < \infty$), případně $b_{n+1} = b_n + 1$. Tímto postupem získám rostoucí posloupnost b_n , která musí mít limitu. Označme tuto limitu β . Dále položíme $\tilde{I} = (a, \beta)$, $\tilde{x} = x_n(t)$, pro všechna $t \in \tilde{I}$ zvolím n tak, aby $t \in I_n$. Na volbě n nezávisí, neboť na příslušných intervalech jsou funkce x_n stejné.

Dokážeme, že takto definované řešení (\tilde{x}, \tilde{I}) je maximální. Pro spor budeme předpokládat, že existuje rozšíření na $(a, \hat{\beta})$ takové, že $\hat{\beta}$. Okamžitě vidíme, že $\beta < \infty$. Vezmeme n takové, aby $\beta - b_n < \hat{\beta} - \beta$ a $\beta - b_n < 1$ (existuje díky tomu, že b_n konvergují k β). V tom případě (x_n, I_n) má prodloužení až do $\hat{\beta}$, tedy $\omega_n \geq \hat{\beta}$. Pak ale (pokud $\omega_n = \infty$) $b_{n+1} = b_n + 1 > \beta$, máme spor, případně pro ω_n konečné máme $b_{n+1} = \frac{b_n + \omega_n}{2} > \frac{2\beta - \hat{\beta} + \hat{\beta}}{2} = \beta$, opět jsme došli ke sporu. \square

V případě f lipschitzovské se důkaz dá výrazně zjednodušit. Budeme uvažovat všechna prodloužení řešení x (platí jednoznačnost), dostaneme lineárně uspořádanou množinu, potom díky Zornovu lemmatu existuje maximální prvek.

Věta 3.3 (Picard). Nechť $f \in C_x^1(\Omega)$. Pak pro každé $(x_0, t_0) \in \Omega$ existuje právě jedno maximální řešení x diferenciální rovnice (1) v Ω splňující $x(t_0) = x_0$.

Důkaz. Plyne z Peanovy věty (Věta 1.6) a Věty 3.2. \square

Lemma 3.4. Řešení (x, I) diferenciální rovnice (1) lze prodloužit za bod b právě tehdy, když platí všechny

- (i) $b < \infty$;
- (ii) existuje $\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) =: x_0 \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) $(x_0, b) \in \Omega$.

Důkaz. Nutnost těchto podmínek plyne triviálně z podstaty prodloužení (cvičení). Dokážeme, že jde o podmínky postačující. Nechť tedy máme (x_0, b) jakou novou počáteční podmínku, dle Peanovy vety existuje řešení \hat{x} na $(b - \delta, b + \delta)$

splňující tuto počáteční podmínku. Definujeme $\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t < b \\ \tilde{x}(t), & t \geq b \end{cases}$. Potom \hat{x} je řešení (díky principu nalepování) a navíc prodlužuje x za bod b , což jsme chtěli dokázat. \square

Na závěr si uvedeme jednu důležitou větu, která nám poskytne představu o tom, jak vypadají maximální řešení diferenciálních rovnic.

Věta 3.5 (Opuštění kompaktu). *Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní, nechť (x, I) je maximální řešení rovnice (1) splňující $(x(t_0), t_0) \in K$ pro nějaké $t_0 \in I$. Potom existují $t_1 > t_0 > t_2$ taková, že $(x(t_1), t_1) \notin K$ a $(x(t_2), t_2) \notin K$.*

Důkaz. Pro spor budeme předpokládat, že takové t_1 neexistuje, chceme dojít ke sporu s maximalitou řešení. Mějme řešení x na (a, b) a $(x(t), t) \in K$ pro všechna $t \in [t_0, b)$. Ukážeme, že toto řešení můžeme prodloužit za b . Využijeme k tomu Lemma 3.4.

Zřejmě platí $b < \infty$ (díky kompaktnosti K). Dále dokážeme, že existuje $\lim_{t \rightarrow b^-} x(t)$ pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Mějme $s, t \in (t_0, b)$. Dále díky Lagrangeově větě o střední hodnotě máme

$$\|x(s) - x(t)\| \leq \|x'(\xi)\| |s - t| = \|f(x(\xi), \xi)\| |s - t| \leq M |s - t|,$$

kde poslední nerovnost plyne z toho, že funkce f je omezená na kompaktu K konstantou M . Nakonec $(x_0, b) = \lim_{t \rightarrow b^-} (x(t), t)$, tedy z uzavřenosti K máme, že $(x_0, b) \in K \subset \Omega$.

Zjistili jsme, že řešení lze prodloužit za bod b , což je spor s jeho maximalitou. Důkaz pro t_2 se udělá obdobně. \square

4 Závislost na počáteční podmínce

Lemma 4.1 (Gronwall). *Nechť $w(t), g(t)$ jsou nezáporné a spojité na nějakém intervalu I a nechť $t_0 \in I, K \geq 0$. Nechť pro každé $t \in I$ platí*

$$w(t) \leq K + \left| \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds \right|.$$

Potom pro každé $t \in I$ platí

$$w(t) \leq K \exp \left(\left| \int_{t_0}^t g(s)ds \right| \right).$$

Důkaz. Definujeme $\Phi(t) := K + \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds + \varepsilon$ pro $t > t_0$. Okamžitě z předpoklady vidíme, že $w(t) \leq \Phi(t)$. Zderivujeme funkci $\Phi(t)$, dostáváme $\Phi'(t) = w(t)g(t) \leq \Phi(t)g(t)$ což po vydělení $\Phi(t)$ (je nenulové díky přičtení ε) nám dává $\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq g(t)$, což můžeme přintegrovat od t_0 do t , čímž dostaneme $\int_{t_0}^t \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} ds \leq \int_{t_0}^t g(s)ds$. Po vyčíslení integrálů dostaneme $\log(\Phi(t) - \Phi(t_0)) \leq \int_{t_0}^t g(s)ds$. Je-li \exp je rostoucí funkce, můžeme psát $\frac{\Phi(t)}{\Phi(t_0)} \leq \exp \left(\int_{t_0}^t g(s)ds \right)$.

Nakonec dostáváme $w(t) \leq \Phi(t) \leq (K + \varepsilon) \exp \left(\int_{t_0}^t g(s)ds \right)$. Požadované tvrzení získáme posláním ε do 0. \square

konec 3. přednášky (7.3.2025)

Lemma 4.2. *Nechť f je globálně L -lipschitzovská v Ω vzhledem k x . Potom pro libovolná dvě řešení $(x, I), (y, J)$ v Ω a body $t, t_0 \in I \cap J$ platí*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| \exp(L|t - t_0|).$$

Důkaz. Můžeme psát

$$\|x(t) - y(t)\| = \left\| x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), s)ds - \left(y(t_0) + \int_{t_0}^t f(y(s), s)ds \right) \right\| \leq$$

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^t |f(x(s), s) - f(y(s), s)| ds \right\| \leq$$

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^t L|x(s) - y(s)|ds \right\|.$$

Poté z Gronwallova lemmatu dostáváme, že

$$\|x(t) - y(t)\| \leq K e^{\left| \int_{t_0}^t L ds \right|} = K e^{|t - t_0|L},$$

kde funkci $w(s)$ ze znění lemmatu odpovídá výraz $\|x(s) - y(s)\|$. \square

Jednoduchým důsledkem tohoto lemmatu je mj. jednoznačnost řešení (stačí uvažovat řešení s $x(t_0) = y(t_0)$).

Definice 4.3. Necht f je spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω . Potom definujeme *řešící funkci* $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^n$ předpisem $\varphi(t; t_0, x_0) := x(t)$, kde $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je řešení splňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$ a $t \in I$. Zde G je maximální možná, tj. obsahuje všechny trojice $(t; t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2}$ pro něž výraz $\varphi(t; t_0, x_0)$ má smysl.

Například, uvažujeme-li rovnici $x'(t) = x(t)$. Obecným řešením této rovnice je funkce $x(t) = ce^t$, vyřešením rovnice s počáteční podmínkou dostaneme řešící funkci $\varphi(t; t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}$.

Věta 4.4. Množina G z předchozí definice je otevřená a φ je spojitá na G .

Důkaz. Intermezzo: otevřenost G znamená, že pro každé $(x_0, t_0) \in \Omega$ a t existuje $r > 0$ takové, že pokud $\|(y_0, s_0) - (t_0, x_0)\|$, potom řešení y procházející bodem (y_0, s_0) je definované v bodech $(t - r, t + r)$, spojitost pak odpovídá tomu, že toto řešení bude po celou dobu “blízko” toho původního.

Bez újmy na obecnosti necht $t_0 > t$. Vezměme $(t; t_0, x_0) \in G$, buď x maximální řešení s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. Pak $[t_0, t] \subset D_x$ (řešení je definováno na celém tomto intervalu). Vezměme $\delta > 0$ tak malé, aby $[t_0, t + 2\delta] \subset D_x$ (to můžeme, neboť D_x je otevřená) a zároveň $K_\delta := \{(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : s \in [t_0 - \delta, t + \delta] \wedge |y(s) - x(s)| \leq \delta\} \subset \Omega$. Takto definovaná množina K_δ je kompaktní a tedy f je na K_δ omezená konstantou c_0 (spojitá funkce na kompaktu) díky čemuž z lokální lipschitzovskosti plyne globální L -lipschitzovskost vzhledem k x .

Dokážeme, že řešení “blízko” toho původního neopustí “rouru” K_δ . Zvolme $\varepsilon > 0$ takové, aby $\varepsilon < \frac{\delta}{2(1+c_0)e^{L(t-t_0+2\delta)}}$. Vezměme y_0, s_0 tak, aby $|s_0 - t_0| < \varepsilon$, $|x_0 - y_0| < \varepsilon$. Dále vezmeme y maximální řešení s podmínkou $y(s_0) = y_0$. Chceme dokázat, že y je definované aspoň na intervalu $[s_0, t + \delta]$ a platí $|y(s) - x(s)| \leq \delta$ pro všechna $s \in [s_0, t + \delta]$.

Můžeme psát

$$|y(s_0) - x(s_0)| \leq |y(s_0) - x(t_0)| + |x(t_0) - x(s_0)| \leq |y_0 - x_0| + |x'(t_0)| |t_0 - s_0| \leq (1 + c_0)\varepsilon,$$

kde ξ je konstanta z Lagrangeovy věty, která ve vícerozměrném prostoru platí pouze jako neostrá nerovnost.

Dále odhadujeme (použijeme Lemma 4.2)

$$|y(s) - x(s)| \leq |y(s_0) - x(s_0)| e^{L|s-s_0|} \leq (1 + c_0)\varepsilon e^{L|s-s_0|} \leq (1 + c_0)\varepsilon e^{L(t-t_0+2\delta)},$$

kde uvažujeme pouze body s , pro které existuje $y(s)$ a y leží v K_δ na $[s_0, s]$. Z volby ε dostáváme navíc

$$|y(s) - x(s)| \leq (1 + c_0)\varepsilon e^{L(t-t_0+2\delta)} < \frac{\delta}{2}. \quad (2)$$

Maximální řešení y opustí kompakt (Věta 3.5) K_δ někde za časem s_0 . Označme γ čas prvního opuštění (přesněji řečeno infimum všech časů, kdy to už není v tom kompaktu). Na intervalu $[s_0, \gamma]$ platí odhad (2), tedy $|y(\gamma) - x(\gamma)| < \frac{\delta}{2}$,

z čehož máme $\gamma = t + \delta$, to znamená, že kompakt nemůžeme opustit jinak než za časem t . Tím jsme dokázali otevřenost G .

Dokážeme spojitost φ na G . Vezměme dva body $(t; t_0, x_0)$ a $(s; s_0, y_0)$ jako minule a uvažujme rozdíl

$$\begin{aligned} |\varphi(t; t_0, x_0) - \varphi(s; s_0, y_0)| &\leq |\varphi(t; t_0, x_0) - \varphi(s; t_0, x_0)| + \\ |\varphi(s; t_0, x_0) - \varphi(s; s_0, y_0)| &\leq |x(t) - x(s)| + |x(s) - y(s)| \leq \\ c_0(t - s) + |x(s_0) - y(s_0)|e^{L|s-s_0|} &\leq c_0|t - s| + (1 + c_0)e^{L|s-s_0|}|x_0 - y_0|, \end{aligned}$$

čímž jsme ukázali lipschitzovskost, a tedy spojitost φ na G . \square

Z hlediska praktických aplikací často uvažujeme rovnici (1) ve tvaru $x' = f(x, t, \lambda)$ závislém na hodnotě parametru λ . Přidejme druhou rovnici $\lambda' = 0$ a počáteční podmínky $x(t_0) = 0$ a $\lambda(t_0) = \lambda_0$, čímž jsme závislost na parametru převedli na závislost na počáteční podmínce (v případě, že f je závislý na λ lipschitzovsky).

Označme pro účely následující věty $\frac{\partial}{\partial w}$ derivaci ve směru $w \in \mathbb{R}^n$ dle proměnné x_0 .

Věta 4.5. *Nechť $f \in C_x^1(\Omega)$, $w \in \mathbb{R}^n$. Potom $\frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ existuje v každém bodě G . Označíme-li $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ a $u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$, pak funkce u je řešením rovnice ve variacích*

$$u' = \nabla_x f(x(t), t)u, u(t_0) = w. \quad (3)$$

konec 4. přednášky (14.3.2025)

Důkaz. Větu dokážeme za silnějšího předpokladu $f \in C_x^2(\Omega)$.

Vezmeme pevně bod (x_0, t_0) a víme, že tímto bodem prochází právě jedno maximální řešení, označíme ho $x(t)$. Dále označme $A(t) = \nabla_x f(x(t), t)$. Potom $A(t)$ je matice $n \times n$. Vezmeme pevné $w \in \mathbb{R}^n$ a označme $u(t)$ maximální řešení počáteční úlohy (3).

Dle Věty 5.4 existuje právě jedno řešení a je definované na celém intervalu, kde je definovaná $A(t)$. Chceme dokázat, že $u(t) = \frac{\partial}{\partial w}\varphi(t, t_0, x_0)$. Z definice máme, že

$$\frac{\partial}{\partial w}\varphi(t, t_0, x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)).$$

Vezmeme t pevné tak, aby $(t, t_0, x_0) \in G$, tedy $x(t)$ je dobře definované. Vezmeme dost malé h tak, aby $\varphi(t, t_0, x_0 + hw)$ bylo definované. Položme $y_h(t) := \varphi(t, t_0, x_0 + hw)$.

Definujeme funkci $\eta_h(t) = \frac{1}{h}(y_h(t) - x(t)) - u(t)$. Ukážeme, že $\lim_{h \rightarrow 0} \eta_h(t) = 0$. Pišme

$$\eta_h'(t) = \frac{1}{h}(y_h'(t) - x'(t)) - u'(t) = \frac{1}{h}(f(y_h(t), t) - f(x(t), t)) - \nabla_x f(x(t), t)u(t).$$

Použijeme Taylorův rozvoj prvního řádu pro funkci f , dostaneme

$$\eta'_h(t) = \frac{1}{h}(\nabla_x f(x(t), t)(y_h(t) - x(t)) + \frac{1}{2}(y_h(t) - x(t))^T \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x(t), t)(y_h(t) - x(t)) - \nabla_x f(t, x(t))u(t).$$

Tedy máme, že

$$\eta'_h(t) = \nabla_x f(x(t), t) \left[\frac{1}{h}(y_h(t) - x(t)) - u(t) \right] + \frac{1}{h}z_n(t).$$

Potom $\eta'_h(t) = A(t)\eta_h(t) + z_n(t)$.

Pro h malé je vše v K_δ z Věty 4.4. Na K_δ jsou $\nabla_x f$ a $\nabla_x^2 f$ omezené $\leq M$. Zde předpokládáme, že $f \in C_x^2(\Omega)$. Potom z Lemmatu 4.2 můžeme psát

$$\|z_h(t)\| \leq \frac{1}{2}M\|y_h(t) - x(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}M\|y_h(t_0) - x(t_0)\|^2 e^{2M|t-t_0|} \leq Ch^2\|w\|^2.$$

Uvědomíme si, že $\eta_h(t_0) = 0$ a napíšeme integrální rovnici odpovídající diferenciální rovnici pro η'_h

$$\eta_h(t) = \eta_h(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)\eta_h(s) + z_n(s)ds,$$

Tedy $\|\eta_h(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t M\|\eta_h(s)\| + Chds \right| = C|t - t_0|h + \left| \int_{t_0}^t M\|\eta_h(s)ds \right|$. Použijeme Gronwallovo lemma (Lemma 4.1), dostaneme.

$$\|\eta_h(t)\| \leq \tilde{C}he^{M|t-t_0|},$$

tedy $\eta_h(t) \rightarrow 0$ pro $h \rightarrow 0$, čímž je důkaz ukončen. \square

Ukážeme si jednu aplikaci následující věty pro výpočet derivace řešící funkce.

Příklad 4.6. Mějme rovnici $x' = x$, její řešící funkce má tvar $\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}$. Potom $\frac{d}{dx}\varphi(t, t_0, x_0) = e^{t-t_0}$. Totéž můžeme spočítat z předchozí věty. Hledaná funkce řeší diferenciální rovnici $u' = u$ s počáteční podmínkou $u(t_0) = t$. Jejím řešením je e^{t-t_0} , což jsme chtěli dokázat.

Za uvedených předpokladů dokonce $\frac{d\varphi}{dw}$ závisí spojitě na x_0 tj. řešící funkce je diferencovatelná (má totální diferenciál) vzhledem k x_0 . Lze též ukázat, že φ je diferencovatelná vůči t a t_0 .

5 Lineární rovnice

Definice 5.1. Normu matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definujeme

$$\|A\| = \sup\{|Ax|; x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\},$$

kde $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ je norma vektoru $x \in \mathbb{R}^n$.

Věta 5.2 (Vlastnosti normy matice). *Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Potom:*

(i) $\|A\| \geq 0$ a $\|A\| = 0$ právě když $A = 0$.

(ii) $\|aA\| = |a|\|A\|$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$.

(iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

(iv) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

(v) $|Ax| \leq \|A\||x|$ pro $x \in \mathbb{R}^n$.

(vi) Je-li A regulární, pak $Ay \geq \frac{|y|}{\|A^{-1}\|}$ pro $y \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz. První tři vlastnosti říkají, že operátor $\|\cdot\|$ je norma (cvičení).

Dokážeme vlastnost (v). Příklad $x = 0$ je triviální, nechť tedy $x \neq 0$. Položme $y = \frac{x}{|x|}$. Potom můžeme psát

$$|Ax| = |A(|x|y)| = |x|Ay = |x||Ay| \leq |x|\|A\|.$$

K důkazu vlastnosti (iv) můžeme psát $|ABx| \leq \|A\|\|B\||x|$, kde jsme dvakrát použili již dokázanou vlastnost (v). Potom

$$\|AB\| = \sup_{|x| \leq 1} |ABx| \leq \sup_{|x| \leq 1} \|A\|\|B\||x| \leq \|A\|\|B\| \cdot 1.$$

Nakonec, pro vlastnost (vi) položíme $v := Ay$, tedy $y = A^{-1}v$. Potom

$$|y| = |A^{-1}v| \leq \|A^{-1}\||v| = \|A^{-1}\||Ay|, \text{ tedy } |Ay| \geq \frac{|y|}{\|A^{-1}\|},$$

čímž je důkaz ukončen. □

Definice 5.3. Lineární rovnici rozumíme rovnici

$$x' = A(t)x + g(t), x(t_0) = x_0, \quad (4)$$

kde $A(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $g(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou spojité.

V přednášce MA3 jste již studovali tento typ rovnic, teď se však budeme věnovat obecnějšímu případu, kdy A a g závisí na t .

Věta 5.4. *Nechť $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je dáno. Pak existuje jediné řešení rovnice (4) definované na celém (a, b) splňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$.*

Důkaz. Rovnice (4) je ekvivalentní rovnici (1), kde $f(x, t) = A(t) \cdot x + g(t)$. Můžeme psát

$$|f(x, t) - f(y, t)| = |A(t)x - A(t)y| \leq \|A(t)\| |x - y|.$$

Funkce $A(t)$ je omezená na kompaktních intervalech, tedy f je lipschitzovská. Tedy pro každou počáteční podmínku existuje právě jedno maximální řešení. Dokážeme, že toto řešení je definované na celém (a, b) .

konec 5. přednášky (21.3.2025)

Předpokládejme, že řešení není definované na celém (a, b) . Potom existují $\alpha, \beta \in (a, b)$ takové, že řešení je definováno na (α, β) . Toto řešení musí opustit každý kompaktní, tedy mimo jiné i $K = [t_0, \beta] \times \bar{B}(0, R)$, kde R je dostatečně velké. Řešení x splňuje

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| \int_{t_0}^t \|A(s)\| |x(s)| + |g(s)| ds \stackrel{\substack{\|A(s)\| \leq L \\ |g(s)| \leq \tilde{C}}}{\leq} C + \int_{t_0}^t L |x(s)| C ds \leq$$

Z Gronwallova lemmatu dostaneme

$$\leq \tilde{C} + C(\beta - t_0) + \int_{t_0}^t L |x(s)| ds \implies |x(t)| \leq \underbrace{[\tilde{C} + C(\beta - t_0)e^{L(\beta - t_0)}]}_R.$$

Došli jsme ke sporu s Větou 3.5, neboť řešení x nemůže opustit kompaktní K . \square

Důležitá poznámka: řešení existuje globálně na oboru spojitosti $A(t), g(t)$. Ve skutečnosti předchozí věta i pro nelineární rovnice $x' = f(x, t)$ se sublineární pravou stranou, tj. pokud $|f(x, t)| \leq a(t)|x| + g(t)$, kde $a(\cdot), g(\cdot)$ jsou spojitě.

Definice 5.5. *Homogenní rovnici* rozumíme rovnici (4) pro $g(t) \equiv 0$, tj.

$$x' = A(t)x, x(t_0) = x_0. \quad (5)$$

Použijeme znalosti lineární algebry k tomu, abychom mohli formalizovat postup řešení lineárních ODR.

Věta 5.6. *Množina \mathcal{R}_H řešení homogenní rovnice (5) bez zadané počáteční podmínky tvoří n -dimenzionální podprostor $C^1((a, b), \mathbb{R}^n)$.*

Důkaz. Jádro lineárního zobrazení $Lx := x' - Ax$ je vektorový prostor. Dokážeme, že má dimenzi n . Necht $i = 1, \dots, n$ a $x(t_0) = e_i$, pro tuto počáteční podmínku dostaneme řešení x^i . Potom $\{x^1, \dots, x^n\}$ tvoří bázi prostoru všech řešení. Skutečně, tyto vektory jsou lineárně nezávislé, mějme lineární kombinaci $c_1 x^1 + \dots + c_n x^n = 0$, speciálně v čase t_0 máme $c_1 e^1 + \dots + c_n e^n$, což implikuje, že $c_i = 0$ pro každé i . Navíc vezmeme libovolné řešení $z' = A(t)z$, opět zkoumejme stav v čase t_0 . Máme $z(t_0) = d_1 e^1 + \dots + d_n e^n$ pro vhodná d_1, \dots, d_n . Definujme $y(t) := d_1 x^1(t) + \dots + d_n x^n(t)$, tedy y řeší rovnici $y' = Ay$ a $y(t_0) = z(t_0)$, z čehož díky jednoznačnosti řešení dostáváme $y = z$. Tudíž jsme našli n -prvkovou bázi, tedy prostor \mathcal{R}_H má dimenzi n . \square

Definice 5.7. *Fundamentální systémem* pro (5) rozumíme libovolnou bázi \mathcal{R}_H . Matice, jejíž sloupce tvoří prvky libovolného fundamentálního systému, nazýváme *fundamentální maticí* pro (5).

Uvedeme si několik poznámek k definici fundamentální matice. Je-li $\Phi(t)$ nějaká fundamentální matice, pak

- $\Phi(t)$ splňuje “maticový tvar (5)”, tedy $\Phi'(t) = A\Phi(t)$.
- $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (a, b)$.
- Obecné řešení (5) má tvar $\Phi(t)c$, kde $c \in \mathbb{R}^n$.
- $\tilde{\Phi}(t) := \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ je také fundamentální matice, která navíc splňuje $\tilde{\Phi}(t_0) = I$.

Věta 5.8 (Variace konstant). *Nechť $\Phi(t)$ je libovolná fundamentální matice pro (5). Potom řešení nehomogenní rovnice (4) lze napsat ve tvaru*

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)g(s)ds$$

pro $t \in (a, b)$

Důkaz. Zderivováním dostaneme $x' = A(t)x + g(t)$, dále stačí ověřit počáteční podmínku dosazením. \square

Definice 5.9. *Wronského determinant* (Wronskián) rovnice (5) je reálná funkce $w(t) := \det(\Phi(t))$, kde Φ je libovolná fundamentální matice příslušné rovnice.

Věta 5.10 (Liouvilleova formule). *Nechť $\Phi(t)$ je maticové řešení (5) a nechť $w(t) = \det \Phi(t)$. Potom*

$$w(t) = w(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right),$$

kde $\operatorname{tr} A$ je stopa matice A .

Důkaz. Dokazovaná rovnost je ekvivalentní s

$$w'(t) = w(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right) \operatorname{tr} A(t)$$

a tedy

$$w'(t) = \operatorname{tr} A(t)w(t), w(t_0) = w(t_0)$$

Dále

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \Phi(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{\sigma} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} \Phi_{1,\sigma(1)}(t) \dots \Phi_{n,\sigma(n)}(t) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\sigma} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} \overbrace{\Phi \dots \Phi}^{\Phi' \text{ je v } k\text{-tém řádku}} = \sum_{k=1}^n \det D_k, \end{aligned}$$

kde D_k je matice Φ se zderivovaným k -tým řádkem.

konec 6. přednášky (28.3.2025)

Dále si uvědomíme, že $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, přičemž násobení maticí zleva provádí řádkové úpravy na matici $\Phi(t)$. Konkrétně $\varphi_k^{j'}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ki}(t)\varphi_i^j(t)$.

Platí $\det D_k = A_{kk}(t) \det \Phi(t)$ (vlastnosti determinantu). Z toho dostáváme, že $w'(t) = \det \Phi(t) \sum_{k=1}^n A_{kk}(t) = w(t) = \operatorname{tr} A(t)$. \square

Pokud $\operatorname{tr} A(t) > 0$, potom wronskián roste, $= 0$ množina možných hodnot řešení zachovává objem a pro $\operatorname{tr} A(t) < 0$ v průběhu času objem klesá.

Příklad 5.11. Řešme rovnici

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dostáváme $x' = 2x, y' = -2y$, tedy $x = x(0)e^{2t}, y = y(0)e^{-2t}$. Nechť $x(0), y(0) \in [0, 1]$. Potom pro fixní $t_1 > 0$ dostáváme $x(t_1) \in [0, e^{2t_1}], y(t_1) \in [0, e^{-2t_1}]$. Obsah tohoto obdélníku je $e^{2t_1}e^{-2t_1} = 1$. Tedy, obsah je konstantní, což odpovídá pozorování z věty, neboť stopa matice ze zadání je nulová.

Příklad 5.12. Mějme rovnici $x' = f(t, x)$. Ukážeme si, že roli stopy matice z předchozího příkladu tu hraje divergence f v proměnné x .

6 Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Definice 6.1. *Lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty* a s maticí $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je rovnice

$$x' = Ax. \quad (6)$$

Myšlenkou studia těchto rovnic je analogie s rovnicí $x' = ax$ pro $a \in \mathbb{R}$, kde řešením je $x(t) = x_0 e^{at}$. Ukážeme, že rovnice (6) má řešení $x(t) = e^{At} x_0$.

Definice 6.2. *Maticovou exponenciálu* definujeme předpisem

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

s konvencí $A^0 = I$.

Řada s definice maticové exponenciály je dobře definovaná, neboť $\|\frac{1}{k!} A^k\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k$, přičemž $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c^k = e^c$ konverguje pro každé $c \in \mathbb{R}$. Navíc z tohoto odhadu dostáváme $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

Příklad 6.3. Nechť $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Potom

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{2^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{1^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Věta 6.4. *Nechť $U(t) = e^{tA}$. Pak $U(t)$ je fundamentální matice rovnice (6) a platí $U(0) = I$.*

Důkaz. Řada konverguje pro všechny matice, tedy i pro matici tA , což znamená, že U je dobře definovaná. Platí

$$[U(t)]_{ij} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [A^k]_{ij} t^k.$$

Toto je mocninná řada s poloměrem konvergence ∞ , tedy ji můžeme derivovat člen po členu (nultý člen se zderivuje na nulu).

$$U'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{k-1} = A e^{tA} = AU(t).$$

Vytknutí A můžeme provést, neboť operátor násobení maticí A je spojitý.

Závěr ohledně $U(0)$ plyne z toho, že pro $t = 0$ je první člen sumy roven jednotkové matici a všechny ostatní jsou nulové. \square

Z obecného tvaru řešení dostáváme, že $x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$, přičemž $t_0 = 0$ a tedy $U(0) = U^{-1}(0) = I$. Z toho již plyne $x(t) = e^{tA}x_0$.

Věta 6.5 (Vlastnosti maticové exponenciály). *Platí následující vlastnosti maticové exponenciály*

- (i) $e^{aI} = e^a I$ pro $a \in \mathbb{R}$;
- (ii) pokud $AB = BA$, pak $e^{A+B} = e^A e^B$;
- (iii) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$;
- (iv) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$, speciálně e^A je vždy regulární.

Důkaz. Budeme dokazovat postupně.

- (i) Dosazením dostáváme

$$e^{aI} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} I = I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} I = e^a I.$$

- (ii) Nejprve ukážeme, že $Be^{tA} = e^{tA}B$. To plyne z toho, že

$$Be^{tA} = B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} B \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} B = e^{tA}B.$$

Potom z definice $U(t) = e^{tA}e^{tB}$ a $U'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)U(t)$. Tedy $U(t)$ splňuje rovnici $x'(t) = (A+B)x(t)$, kterou také splňuje $\tilde{U}(t) = e^{(A+B)t}$. Z jednoznačnosti řešení této rovnice dostáváme $e^{tA}e^{tB} = e^{(A+B)t}$.

- (iii) Z definice rozepíšeme

$$e^{C^{-1}AC} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (C^{-1}AC)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C^{-1}A^k C = C^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k C = C^{-1}e^A C.$$

- (iv) Okamžitě plyne z (ii), neboť $e^A e^{-A} = e^0 = I$

□

Důsledek 6.6 (Variace konstant pro (6)). *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $g(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá, $t_0 \in (a, b)$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ jsou dána. Potom řešení rovnice*

$$x' = Ax + g(t), x(t_0) = x_0$$

má tvar

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}g(s)ds.$$

Další otázka, kterou se budeme zabývat je hledání maticové exponenciály. K tomu použijeme takzvaný Jordanův kanonický tvar matice.

Věta 6.7. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, J její Jordanův kanonický tvar, $A = VJV^{-1}$ a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ je diagonála J . Potom $e^{tA} = Ve^{tJ}V^{-1}$, kde matici e^{tJ} definujeme jako $\text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$, přičemž $P(t)$ je blokově diagonální matice se stejně velkými a stejně uspořádanými bloky jako J a blok velikosti k matice $P(t)$ je roven*

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \dots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(k-2)!}t^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Důsledek 6.8. *Bud' $a = \max\{\Re \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ a m velikost největší Jordanovy buňky příslušné k vlastnímu číslu $\Re \lambda = a$. Pak existuje $M > 0$, že $\|e^{tA}\| \leq Mt^{m-1}e^{at}$ pro všechna $t \geq 0$. Speciálně, pro všechna $\tilde{a} > a$ existuje $\tilde{M} > 0$ takové, že $\|e^{tA}\| \leq \tilde{M}e^{\tilde{a}t}$.*

konec 7. přednášky (4.4.2025)

Definice 6.9. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a její spektrum $\sigma(A)$ definujeme $\sigma_-(A) = \sigma(A) \cap \{\Re < 0\}$, $\sigma_0(A) = \sigma(A) \cap \{\Re = 0\}$, $\sigma_+(A) = \sigma(A) \cap \{\Re > 0\}$. Příslušné podprostory generované příslušnými (zobecněnými) vlastními vektory značíme $X_-(A)$, $X_0(A)$, $X_+(A)$ (nazýváme je *stabilní*, *centrální* a *nestabilní* podprostor).

Zřejmě $\mathbb{R}^n = X_+(A) \oplus X_-(A) \oplus X_0(A)$. Tyto prostory jsou invariantní vzhledem k A a též vzhledem k e^{tA} .

Věta 6.10 (Asymptotické chování podprostorů). *Nechť A je daná matice. Potom existují kladná α, β, M a c taková, že platí:*

1. *Pokud $x_0 \in X_-(A)$, pak $|e^{tA}x_0| \leq ce^{-\alpha t}|x_0|$ pro každé $t \geq 0$.*
2. *Pokud $x_0 \in X_+(A)$, pak $|e^{tA}x_0| \leq ce^{\beta t}|x_0|$ pro každé $t \leq 0$.*
3. *Pokud $x_0 \in X_0(A)$, pak $|e^{tA}x_0| \leq c(1 + |t|)^M|x_0|$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Nejdříve nechť $x_0 \in X_-(A)$. Potom $x_0 = \sum_{i=1}^k a_i v_i$, kde v_i jsou zobecněné vlastní vektory příslušné $\lambda_i \in \sigma_-(A)$. Dále máme, že $e^{tA}x_0 = Ve^{tJ}V^{-1}x_0$. Spočteme $V^{-1}x_0$. Jestliže v je sloupec matice V , potom $V^{-1}v$ je jeden ze sloupců jednotkové matice, tedy má tvar $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$. Tedy $V^{-1}x_0$ má nenulové hodnoty jen v řádcích příslušných $\Re \lambda < 0$. Můžeme odhadovat normu

$$\|e^{tA}x_0\| \leq \|V\| \|e^{tJ} \text{ řádky s } e^{-\alpha t}\| \|V^{-1}x_0\| \leq Ce^{-\alpha t} \|x_0\|.$$

Zde jsme využili faktu, že "polynom" $e^{-\lambda t} t^k$ lze odhadnout $e^{-\lambda t} t^k \leq e^{(-\lambda + \varepsilon)t} c$ pro vhodná c a ε .

Důkaz ostatních implikací je podobný. □

V předchozí větě platí i opačná implikace, a to ve smyslu, že uvedené vlastnosti charakterizují dané podprostory.

7 Stabilita

Lemma 4.2 nám teoreticky poskytuje spojitost řešící funkce v proměnné x_0 , pro větší t však kvůli exponenciálnímu růstu nemá význam. Budeme proto zkoumat okolnosti, za nichž existují odhady, které se nezhoršují pro $t \in \infty$.

Definice 7.1. Nechť $f = f(x, t)$ je spojitá v otevřené $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ a navíc lokálně lipschitzovská vůči x . Nechť $\Omega \supset \{0\} \times I$ kde $I = (\tau, \infty)$ a nechť $f(0, t) = 0$ pro všechna $t \in I$. Řekneme, že nulové řešení rovnice $x' = f(t, x)$ (1) je

- (i) *stabilní*, jestliže pro všechna $t_0 \in I$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|x_0| < \delta$ implikuje, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno a splňuje $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pro $t \geq t_0$;
- (ii) *nestabilní*, jestliže není stabilní;
- (iii) *lokální atraktor*, jestliže $\forall t_0 \in I$ existuje $\eta > 0$ tak, že $|x_0| < \eta$ implikuj, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno pro všechna $t \geq t_0$ a navíc $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow +\infty$;
- (iv) *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc lokální atraktor;
- (v) *uniformně stabilní*, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $t_0 \in I$ z $|x_0| < \delta$ plyne $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno a splňuje $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pro $t \geq t_0$;
- (vi) *uniformně asymptoticky stabilní*, jestliže je uniformně stabilní a navíc existuje $\eta < \infty$ takové, že $\forall \varepsilon > 0$ existuje $T > 0$ takové, že pro všechna $t_0 \in I$ z $|x_0| < \eta$ plyne, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno pro všechna $t \geq t_0$ a $|\varphi(t, t_0, x_0)| \leq \varepsilon$ pro $t \geq t_0 + T$.

Pojem asymptotické stability zavádíme proto, že lokální atraktor nutně nemusí implikovat stabilitu. Konstrukci takového řešení můžeme nahlédnout pomocí tzv. Vinogradovova systému. V případě autonomní rovnice splývají pojmy (asymptotické) stability a uniformní (asymptotické) stability, neboť můžeme psát $\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, 0, x_0)$.

Obecněji řešeno, řešení $\tilde{x}(t)$ rovnice $x' = f(x, t)$ se nazve stabilní (resp. uniformně stabilní atd.), jestliže má analogickou vlastnost nulové řešení rovnice $u' = g(u, t)$ kde $g(u, t) = f(\tilde{x}(t) + u, t) - f(\tilde{x}(t), t)$.

V případě řešení lineární rovnice (4), tj. $x' = A(t)x + g(t)$ je stabilita ekvivalentní stabilitě libovolného řešení příslušné homogenní rovnice (5).

Věta 7.2. Je dána rovnice $x' = A(t)x$, kde $A(t)$ je spojitá v $I = (\tau, \infty)$. Nechť $\Phi(t)$ je (libovolná) fundamentální matice. Potom nulové řešení je

- 1. *stabilní*, právě když pro $\forall t_0 \in I$ je $\|\Phi(t)\|$ omezená v $[t_0, \infty)$;
- 2. *asymptoticky stabilní*, právě když $\|\Phi(t)\| \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow \infty$;
- 3. *uniformně stabilní*, právě když existuje $c > 0$ takové, že pro všechna $s < t \in I$ je $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq c$.

4. *uniformně asymptoticky stabilní, právě když existují kladná α a c taková, že pro všechna $s < t \in I$ je $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq ce^{-\alpha(t-s)}$.*

Věta 7.3. *Nechť A je konstantní matice. Potom nulové řešení rovnice $x' = Ax$ je*

1. *(uniformně) stabilní, právě když $\Re \lambda \leq 0$ pro všechna vlastní čísla $\lambda \in \sigma(A)$, přičemž $\Re \lambda = 0$ pouze pro polojednoduchá vlastní čísla (tedy příslušné Jordanovy buňky mají velikost 1).*
2. *(uniformně) asymptoticky stabilní, právě když $\Re \lambda < 0$ pro všechna vlastní čísla $\lambda \in \sigma(A)$.*

Důkaz. Plyne ihned z tvaru maticové exponenciály. □

Matice A splňující $\Re \lambda < 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$ se nazývá *Hurwitzowská*.

Lemma 7.4. *Je dána rovnice $x' = Ax + r(x, t)$. Nechť existují kladná α, c tak, že $\|e^{tA}\| \leq ce^{-t\alpha}$ pro $t \geq 0$. Nechť dále $r(x, t) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá a $|r(x, t)| \leq \gamma|x|$ pro všechna x, y kde $\gamma < \frac{\alpha}{c}$. Pak každé řešení splňuje*

$$|x(t)| \leq c|x(t_0)| \exp(-\beta(t - t_0))$$

pro $t \geq t_0$, kde $\beta = \alpha - c\gamma > 0$.

Důkaz. Nechť x řeší $x' = Ax + r(x, t)$ na $(0, +\infty)$. Pak x řeší $x' = Ax + g(t)$, kde $g(t) := r(x(t), t)$. Z variace konstant (Důsledek 6.6) dostáváme, že

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}g(s)ds.$$

Pro $t > t_0$ dostaneme

$$\|x(t)\| \leq ce^{-(t-t_0)\alpha}\|x_0\| + \int_{t_0}^t ce^{-(t-s)\alpha}\gamma\|x(s)\|ds.$$

Jinými slovy,

$$\|x(t)\|e^{t\alpha} \leq ce^{t_0\alpha}\|x_0\| + \int_{t_0}^t ce^{-(t-s)\alpha}\gamma\|x(s)\|ds.$$

Z Gronwallova lemmatu (Lemma 4.1) dostáváme

$$e^{t\alpha}\|x(t)\| \leq ce^{t_0\alpha}\|x_0\|e^{c\gamma(t-t_0)}.$$

Po opětovném přenásobení exponenciálou nakonec máme

$$\|x(t)\| \leq c\|x_0\|e^{(t-t_0)(c\gamma-\alpha)} = ce^{-\beta(t-t_0)}\|x_0\|.$$

□

Věta 7.5 (o linearizované stabilitě). *Je dána rovnice $x' = f(x)$. Necht $f(x_0) = 0$ a $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 a necht $\Re \lambda < 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$, kde $A = \nabla f(x_0)$. Potom x_0 je (uniformně) asymptoticky stabilní.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti uvažujme $x_0 = 0$. Dále definujeme $g(x) = f(x) - Ax$. Potom naši rovnici přepíšeme do tvaru $x' = Ax + g(x)$.

O matici A můžeme říct, že $\|e^{tA}\| \leq ce^{-\alpha t}$. Přesněji řečeno, necht $\lambda_0 := \max\{\Re \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$. Necht $-\alpha \in (\lambda_0, 0)$ a k tomuto α nalezneme $c > 0$ takové, že platí výše uvedená rovnost. Existenci takového c nám zaručuje Důsledek 6.8.

Dále o funkci g víme, že $g(x) = o(\|x\|)$ a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\|x\|} = 0$. Necht $\gamma < \frac{\alpha}{c}$, vezmeme $\delta > 0$ dost malé, aby $\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} < \gamma$ na $B(0, \delta)$. Pak na tomto okolí platí $\|g(x)\| \leq \delta \|x\|$.

Použijeme seřezávací funkci

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, t < \frac{\delta}{2}; \\ 0, t > \delta; \\ \text{spojité prodloužení na } (\frac{\delta}{2}, \delta). \end{cases}.$$

Dále definujeme $h(x) := \eta(\|x\|)g(x)$. Podíváme se na rovnici $x' = Ax + h(x)$. Pro $\|x\| < \frac{\delta}{2}$ platí $h(x) = g(x)$, dále pro $\|x\| > \delta$ je $h(x)$ nulová a nakonec pro $\|x\| \in [\frac{\delta}{2}, \delta]$ platí $\|h(x)\| \leq \|g(x)\|$. Tato porušená rovnice již splňuje předpoklad Lemmatu 7.4. Aplikací tohoto lemmatu dostáváme odhad na řešení této porušené rovnice.

$$\|x(t)\| \leq c\|x(t_0)\|e^{-\beta(t-t_0)}, \beta > 0.$$

Vezmeme $x(t_0)$ dost malé, potom díky předchozímu odhadu funkce x zůstane v $B(0, \frac{\delta}{2})$ pro všechna $t \geq 0$, tedy $h(x) = g(x)$, z čehož nakonec dostáváme, že x řeší i původní rovnici $x' = Ax + g(x)$. Tím jsme dokázali, že řešení začínající blízko nuly zkolabují v nekonečno, což je právě definice asymptotické stability. \square

Věta 7.6 (o linearizované nestabilitě). *Je dána rovnice $x' = f(x)$. Necht $f(x_0) = 0$ a $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 a necht existuje vlastní číslo $\lambda \in \sigma(A)$ takové, že $\Re \lambda > 0$, kde $A = \nabla f(x_0)$. Potom x_0 je (uniformně) asymptoticky nestabilní.*

Důkaz. Idea důkazu: nejdříve si matici A převedeme do Jordanova kanonického tvaru, poté si ukážeme, že řešení “se drží” nestabilního směru. Nakonec důkaz formálně dokončíme pomocí věty o opuštění kompaktu (Věta 3.5).

Bez újmy na obecnosti uvažujme $x_0 = 0$. Necht tedy $A = VJV^{-1}$ je převod matice A do Jordanova tvaru. Přenásobíme matici J zprava maticí $H = \text{diag}(\eta, \eta^2, \dots, \eta^n)$ a zleva maticí $H^{-1} = \text{diag}(\eta^{-1}, \dots, \eta^{-n})$. Dostáváme matici v Jordanově kanonickém tvaru, kde místo jedniček máme η . Potom $A = (VH)\tilde{J}(VH)^{-1}$ Můžeme psát

$$x' = Ax + g(x) = (VH)\tilde{J}(VH)^{-1}x + g(x).$$

Nechť $y := (VH)^{-1}x$, potom

$$y' = (VH)^{-1}x' = \tilde{J}y + (VH)^{-1}g(VHy).$$

Označme $\tilde{g}(y) := g(VHy)$. Dostali jsme tedy rovnici $y' = \tilde{J}y + \tilde{g}(y)$. Platí $\tilde{g}(y) = o(\|y\|)$ (plyne z toho, že $g(x) = o(\|x\|)$).

Mějme vektor $y = (y_1, \dots, y_n)$. Nechť $z = (z_1, \dots, z_j)$ jsou nestabilní směry a $w = (w_{j+1}, \dots, w_n)$ jsou stabilní a centrální směry. Potom nechť $\varphi(t) := \sum_{i=1}^j |z_i|^2$ a $\psi(t) := \sum_{i=j+1}^n |w_i|^2$. Můžeme psát $\varphi(t) = \sum_{i=1}^j z_i \bar{z}_i$ a analogicky pro w_i . Implicitně zde předpokládáme závislost na čase. Dále definujeme $Z := \{(z, w) \in \mathbb{R}^n : \varphi(t) \geq \psi(t)\}$.

Nechť $\lambda_0 := \min\{\Re \lambda; \lambda \in \sigma(A), \Re \lambda > 0\}$. Vezmeme $\eta = \frac{\lambda_0}{6}$ a $\delta > 0$ takové, aby $\|\tilde{g}(y)\| \leq \eta\|y\|$ pro všechna $y \in B_\delta$. Dále definujeme $K := Z \cap \overline{B_\delta}$.

Uvažujme řešení $y(t) = (z(t), w(t))$, pro které budeme odhadovat. Ukážeme, že platí, že pokud $\varphi(t_1) - \psi(t_1) > 0$, potom $\varphi(t) - \psi(t) > 0$ pro všechna $t > t_1$, dokud jsme v B_δ . Ukážeme, že $(\varphi(t) - \psi(t))' > 0$.

Můžeme psát

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^j z_i \bar{z}_i = \sum_{i=1}^j z_i'(t) \bar{z}_i(t) + z_i(t) \bar{z}_i'(t) = \sum_{i=1}^j 2\Re z_i z_i' \\ &= 2\Re \left(\sum_{i=1}^j z_i \lambda_i z_i + \left(\sum_{i=1}^j z_i \mu z_{i+1} \right) + \sum_{i=1}^j z_i \tilde{g}_i(z, w) \right). \end{aligned}$$

Z toho máme, že

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^j 2\Re \bar{\lambda}_i |z_i|^2 + 2\Re \sum_{i=1}^j z_i \mu \bar{z}_{i+1} + 2\Re \sum_{i=1}^j z_i \tilde{g}_i(z, w) \\ &\geq 2\lambda_0 \sum_{i=1}^j |z_i|^2 - \left| 2\Re \sum_{i=1}^j z_i \mu \bar{z}_{i+1} \right| - \left| 2\Re \sum_{i=1}^j z_i \tilde{g}_i(z, w) \right|. \end{aligned}$$

Dále platí (AG-nerovnost)

$$\left| \sum_{i=1}^j \eta z_i \bar{z}_{i+1} \right| \leq \sum_{j=1}^i \eta \frac{1}{2} (|z_i|^2 + |z_{i+1}|^2) \leq \eta \frac{1}{2} (\varphi(t) + \varphi(t)) = \eta \varphi(t)$$

a také

$$\left| \sum_{i=1}^j z_i \overline{\tilde{g}_i(z, w)} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j (|z_i|^2 \eta + \frac{1}{\eta} |\tilde{g}_i(z, w)|^2) = \frac{1}{2} \eta \varphi(t) + \eta \varphi(t),$$

neboť $\sum |g_i|^2 = |g(y)|^2 < \eta^2 |y|^2 \leq 2\eta^2 |z|^2 = 2\eta^2 \varphi(t)$.

Celkově tedy máme, že $\varphi'(t) \geq (2\lambda_0 - 2\eta - 3\eta)\varphi(t) \geq 7\eta\varphi(t)$, jelikož $\lambda_0 > 3\eta$. Obdobně budeme postupovat s odhadem pro $\psi'(t)$. Můžeme psát

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= 2\Re \sum_{i=j+1}^n w_i \bar{w}'_i = 2\Re \sum_{i=j+1}^n w_i (\lambda_i w_i + \eta w_{i+1} + \bar{g}_i(z, w)) \\ &= 2\Re \left(\lambda_i \sum_{i=j+1}^n |w_i|^2 + \sum_{i=j+1}^n w_i \eta \bar{w}_{i+1} + \sum_{i=j+1}^n w_i \bar{g}_i(z, w) \right) \\ &\leq 2\eta \frac{1}{2} \left(\sum_{i=j+1}^n (|w_i|^2 + |w_{i+1}|^2) + \sum_{i=j+1}^n \left(|w_i|^2 \eta + \frac{1}{\eta} |\bar{g}_i^2(z, w)| \right) \right) \\ &\leq 2\eta\psi(t) + \eta\psi(t) + 2\eta\varphi(t) \leq 5\eta\varphi(t),\end{aligned}$$

přičemž v poslední nerovnosti jsme využili faktu, že $\psi(t) < \varphi(t)$. Z těchto dvou právě dokázaných nerovností již plyne $\varphi'(t) - \psi'(t) \geq 2\eta\varphi(t) > 0$.

Z nerovnosti pro $\varphi'(t)$ platí $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \geq 7\eta$. Zintegrováním dostaneme následující nerovnost pro funkci φ :

$$\varphi(t) \geq e^{7\eta(t-t_0)} \varphi(t_0).$$

Nechť $y(0) = (z(0), w(0)) \in K$. Potom existuje $T > 0$ takové, že platí nerovnost $e^{7\eta(T-t_0)} \|\varphi_z(t_0)\|^2 > \delta^2$. Uvažujme kompakt $C := K \times [t_0, T + \varepsilon]$. Naše řešení y tento kompakt opustí. Buď $t_1 = \inf\{t \geq t_0; (y(t), t) \in C\}$.

Pak $t_1 < T + \varepsilon$. Skutečně, nechť $t_1 \geq T + \varepsilon$, potom $\|y(t_1)\|^2 \geq \varphi_z(t_1) \geq e^{7\eta(t_1-t_0)} \varphi_z(t_0) > \delta^2$. To je spor s předpokladem, že t_1 je infimum. Jistě platí $y(t_0) \in \delta K$. Funkce $\varphi - \psi$ je rostoucí, tedy $\varphi(t_0) - \psi(t_0) \geq \varphi(0) - \psi(0)$. Z toho již plyne, že $|y(t_0)| = \delta$. Dostali jsme, že řešení y opustí otevřenou kouli o poloměru δ , což je přesně to, co jsme chtěli dokázat v této větě. \square

konec 9. přednášky (25.4.2025)

Na závěr této kapitoly si uvedeme jednu větu bez důkazu, která se hodí k vyšetřování stability na okolí stacionárních bodů.

Věta 7.7 (Hartman-Grobman). *Uvažujme autonomní rovnici $x' = f(x)$. Nechť x_0 je hyperbolický stacionární bod této rovnice (tedy $\sigma(\nabla f(x_0)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$). Pak existuje okolí U bodu x_0 a okolí V bodu $0 \in \mathbb{R}^n$ a homeomorfismus $\phi : U \rightarrow V$ při kterém se řešení rovnice $x' = f(x)$ zobrazí na řešení rovnice $x' = Ax$, kde $A = \nabla f(x_0)$.*

8 První integrál

V celé této kapitole budeme uvažovat autonomní rovnici

$$x' = f(x) \quad (7)$$

pro f spojitou a lokálně lipschitzovskou.

Definice 8.1. Funkci $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme *prvním integrálem* rovnice (7), jestliže $U \in C^1(\Omega)$ a je nekonstantní a zároveň $t \rightarrow U(x(t))$ je konstantní pro každé řešení x dané rovnice v Ω .

Například, máme-li rovnici $x'' + kx = 0$ (lze pomocí ní popsat kmitání pružiny s hybností $k > 0$), funkce $V(x', x) = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{k}{2}x^2$ je jejím prvním integrálem, neboť tato funkce je zřejmě hladká a nekonstantní a

$$\frac{d}{dt}V(x'(t), x(t)) = x' \cdot x'' + kxx' = x'(x'' + kx) = 0.$$

Věta 8.2 (Charakterizace prvních integrálů pomocí orbitálních derivací). *Bud' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojitá a $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^1 . Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) *Pro všechna řešení x rovnice (7) je $t \mapsto U(x(t))$ konstantní;*
- (ii) *$\nabla U(\xi)f(\xi) = 0$ pro všechna $\xi \in \Omega$.*

Důkaz. (ii) \implies (i): Přímým výpočtem dostaneme $\frac{d}{dt}U(x, t) = \nabla U(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla U(x(t))f(x(t)) = 0$.

(i) \implies (ii): Mějme bod $\xi \in \Omega$. Dle Peanovy věty (Věta 1.6) bodem ξ prochází nějaké řešení x takové, že $x(0) = \xi$. Z toho již dostáváme, že $\nabla U(\xi) \cdot f(\xi) = \frac{d}{dt}U(x(t))|_{t=0} = 0$. \square

Definice 8.3. První integrály U_1, \dots, U_k jsou *lineárně nezávislé* v bodě x_0 , jestliže matice $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{i=1, \dots, k}^{j=1, \dots, n}$ má v tomto bodě hodnotu k .

Je dobré si uvědomit, že prvních integrálů, které jsou lineárně nezávislé v bodě x_0 , může být nejvýše $n - 1$, což plyne z Věty 8.2, a to tak, že pro každý první integrál platí $\nabla U_i(x_0) \perp f(x_0) \neq 0$ a v prostoru dimenze n existuje přesně $n - 1$ lineárně nezávislých vektorů kolmých na daný vektor.

Metodu prvních integrálů budeme používat k redukci počtu rovnic v soustavách ODR. Skutečně, mějme soustavu

$$\begin{cases} x' = f(x, y); \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

a nechť $V(x, y) = K$ je její první integrál. Ve většině případů z toho můžeme vyjádřit x jakožto funkci $x = h(y, K)$, což po dosazení do druhé rovnice nám dává

$$y' = g(h(y, K), y),$$

čímž jsme zredukovali počet rovnic na jednu. K přesné formulaci právě popsaného postupu použijeme následující větu.

Věta 8.4 (O snížení řádu). *Nechť U_1, \dots, U_k jsou první integrály (7) lineárně nezávislé v bodě x_0 . Potom řešení procházející bodem x_0 lze lokálně popsat pomocí $(n - k)$ rovnic $z' = g(z)$, $z \in \mathbb{R}^{n-k}$, $g : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$.*

Důkaz. Označme $K_i = U_i(x_0)$ a $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : U_i(x) = K_i \text{ pro } i = 1, \dots, k\}$. Víme, že $\nabla U_1(x_0), \dots, \nabla U_k(x_0)$ jsou lineárně nezávislé vektory, to znamená, že matice $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{i=1, \dots, k}^{j=1, \dots, n}$ má k lineárně nezávislých sloupců. Bez újmy na obecnosti nechť toto jsou sloupce $1, \dots, k$. Označme $x = (x_1, \dots, x_k, y)$, kde $x \in \mathbb{R}^n$ a pro $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ platí $y = (x_{k+1}, \dots, x_n)$.

Jelikož matice $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{i=1, \dots, k}^{j=1, \dots, k}$ je regulární, díky větě o implicitních funkcích existují konstanty $\delta, \Delta > 0$ takové, že pro každé y z δ -okolí bodu x_0 existuje právě jedna k -tice (x_1, \dots, x_k) z Δ -okolí x_0 (uvažujeme restrikcí na prvních k souřadnic) taková, že platí $U_i(x_1, \dots, x_k, y) = K_i$ pro všechna $i = 1, \dots, k$. Pokud příslušnou k -tici označíme jako $(\varphi_1(y), \dots, \varphi_k(y))$, potom funkce φ je třídy C^1 .

Z výše uvedeného dostáváme, že pokud $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ je řešení rovnice (7), potom pro $i \geq k + 1$ platí

$$x'_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) = f_i(\varphi_1(y(t)), \dots, \varphi_k(y(t)), y(t)) =: \tilde{f}_i(y(t)).$$

Tímto jsme získali požadovanou soustavu rovnic

$$(x'_{k+1}, \dots, x'_n) = y' = \tilde{f}(y(t)), \tilde{f} : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}.$$

□

Věta 8.5 (Existence lineárně nezávislých prvních integrálů). *Nechť $f \in C^1(\Omega)$, $f(x_0) \neq 0$. Potom má rovnice $x' = f(x)$ na okolí x_0 $(n - 1)$ prvních integrálů, které jsou lineárně nezávislé v bodě x_0 .*

Právě vybudovanou teorii můžeme využít k aplikaci takzvané metody charakteristik, což je matematický aparát, který nám umožňuje přecházet mezi autonomními ODR a jistou třídou lineárních parciálních diferenciálních rovnic (podrobnosti viz přednáška Úvod do parciálních diferenciálních rovnic¹).

konec 10. přednášky (2.5.2025)

¹pokud ji zrovna učí někdo přičetný

9 Ljapunovské funkce a stabilita

V této kapitule se pokusíme vybudovat pokročilejší teorii, která nám umožní určit stabilitu u většího počtu možných obyčejných diferenciálních rovnic. Budeme uvažovat evoluční rovnici (1)

$$x' = f(x, t),$$

kde $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Bez újmy na obecnosti dále nechť $f(0, t) = 0$ pro všechna $t \in I$ a $I = [0, +\infty)$, neboli jinými slovy 0 je stacionární řešení této rovnice. Budeme zkoumat stabilitu tohoto nulového řešení.

Definice 9.1. Funkci $\omega : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ nazveme *pozitivně definitní*, pokud je spojitá, $\omega(0) = 0$ a $\omega(x) > 0$ pro všechna $x \in \Omega \setminus \{0\}$.

Pozitivně definitní funkce jsou například $f(x, y) = x^2 + y^2$ nebo $g(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^{2k_i}$ pro $k_i \in \mathbb{N}$ a $a_i > 0$.

Definice 9.2. Funkci $V(x, t) : \Omega \times I \rightarrow [0, +\infty)$ nazveme *ljapunovskou* pro (1) v Ω , jestliže

- (i) V je spojitá a $V(0, t) = 0$ pro všechna $t \in I$;
- (ii) $t \mapsto V(x(t), t)$ je nerostoucí pro každé řešení x rovnice (1);
- (iii) existuje pozitivně definitní funkce ω v Ω taková, že $V(x, t) \geq \omega(x)$ pro všechna $x \in \Omega$ a $t \in I$.

V některých případech první integrál může být kandidátem na ljapunovskou funkci, ale ne vždy to tak vyjde. Dále, je-li V třídy C^1 , je podmínka (ii) ekvivalentní nekladnosti orbitální derivace

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \nabla_x V(x, t) \cdot f(x, t) \leq 0$$

pro všechna $(x, t) \in \Omega \times I$. Důkaz je analogický důkazu Věty 8.2.

Věta 9.3 (Ljapunovská funkce a stabilita). *Nechť (1) má ljapunovskou funkci pro bod 0, pak nulové řešení je stabilní.*

Důkaz. Volme $\varepsilon > 0$ a chceme najít $\delta > 0$ tak, aby $|x_0| < \delta$ implikovalo $|x(t)| < \varepsilon$ v každém čase $t \geq 0$. Bez újmy na obecnosti nechť $\overline{U(0, \varepsilon)} \subset \Omega$. Dále budeme uvažovat ljapunovskou funkci V a příslušnou pozitivně definitní funkci ω (takovou, že $V(x, t) \geq \omega(x)$ pro každé $x \in \Omega$).

Na sféře $S_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \varepsilon\}$ je funkce ω kladná a spojitá a S_ε je kompaktní, tedy ω nabývá na S_ε svého minima $\alpha > 0$ v nějakém bodě $\xi \in S_\varepsilon$.

Máme, že $\omega(x) \geq \alpha$ pro všechna $x \in S_\varepsilon$ a chceme, aby $V(x_0, t_0) < \alpha$. Pro dané t_0 je $V(\cdot, t_0)$ spojitá a $V(0, t_0) = 0$. Díky tomu existuje $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$ takové, že $V(x, t_0) < \alpha$ na $U(0, \delta)$.

Nechť nyní $x_0 \in U(0, \delta)$, tedy $V(x_0, t_0) < \alpha$, a tedy $V(x(t), t) \leq V(x_0, t_0) < \alpha$ pro všechna $t \geq t_0$. Pro spor předpokládejme, že existuje čas t_1 takový, že $|x(t_1)| \geq \varepsilon$, ale pak by díky spojitosti musel existovat čas t_2 takový, že $|x(t_2)| = \varepsilon$, tedy $x(t_2) \in S_\varepsilon$, ale $V(x(t_2), t_2) \geq \omega(x(t_2)) \geq \alpha$, což je spor s volbou vhodného δ . \square

Věta 9.4 (Ljapunovská funkce a asymptotická stabilita). *Nechť rovnice (1) má v $\Omega \times I$ Ljapunovskou funkci V . Nechť navíc existují v Ω pozitivně definitní funkce λ a η takové, že*

$$(i) \quad V(x, t) \leq \lambda(x) \text{ pro každé } (x, t) \in \Omega \times I,$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt}V(x(t), t) \leq -\eta(x(t)), \text{ kdykoli } x \text{ řeší (1) v } \Omega.$$

Potom 0 je asymptoticky stabilní v I .

K důkazu této věty budeme potřebovat následující lemma o zachovávání konvergence při aplikaci pozitivně definitní funkce (poznamenejme si, že opačná implikace platí také díky větě o limitě složené funkce).

Lemma 9.5. *Nechť ω je pozitivně definitní v Ω a $\varepsilon > 0$ je takové, že $\overline{U(0, \varepsilon)} \subset \Omega$. Bud' $(x_n)_{n=1}^\infty$ posloupnost v $\overline{U(0, \varepsilon)}$ splňující $\omega(x_n) \rightarrow 0$. Potom $x_n \rightarrow 0$.*

Důkaz. Volme $\tilde{\varepsilon} > 0$, $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ libovolně. Potom $\overline{U(0, \varepsilon)} \setminus U(0, \tilde{\varepsilon})$ je kompaktní, ω je spojitá, tedy zde nabývá svého minima $\omega(x_0) > 0$. Potom existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ máme $\omega(x_n) < \omega(x_0)$, a tedy $x_n \in U(0, \tilde{\varepsilon})$. \square

Důkaz Věty 9.4. Stabilitu jsme již dokázali ve Větě 9.3, stačí tedy dokázat, že počátek je lokální atraktor. Mějme $\varepsilon > 0$, k tomu ze stability nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro $|x_0| < \delta$ máme $|x(t)| < \varepsilon$ v každém čase $t \geq 0$.

Dále uvažujme x_0 takové, že $|x_0| < \delta$. Funkce $t \mapsto V(x(t), t)$ je neklesající a nezáporná, tedy existuje $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t), t) = a \geq 0$. Dále platí

$$\int_{t_0}^t \eta(x(s))ds \leq - \int_{t_0}^t \frac{d}{ds}V(x(s), s)ds = V(x(t_0), t_0) - V(x(t), t),$$

pro t jdoucí do nekonečna dostáváme $V(x(t_0), t_0) - V(x(t), t) \rightarrow V(x(t_0), t_0) - a$, a tedy

$$\int_{t_0}^\infty \eta(x(s))ds \leq V(x(t_0), t_0).$$

Jmenovitě tento integrál je konečný, a tedy existuje posloupnost $t_n \nearrow +\infty$ taková, že $\eta(x(t_n)) \rightarrow 0$ (pozor, $\eta(x(t))$ samotná nemusí konvergovat k nule). Z právě dokázaného lemmatu dostáváme, že $x(t_n) \rightarrow 0$, z čehož díky spojitosti a pozitivní definitnosti funkce λ v 0 dostáváme $\lambda(x(t_n)) \rightarrow 0$.

Dále můžeme psát $0 \leq V(x(t_n), t_n) \leq \lambda(x(t_n)) \rightarrow 0$, a tedy $V(x(t_n), t_n) \rightarrow 0$. Díky větě o limitě podposloupnosti dostáváme, že $V(x(t), t) \rightarrow 0 = a$ a jelikož $0 \leq \omega(x(t)) \leq V(t, x(t)) \rightarrow 0$, musí nutně platit $\omega(x(t)) \rightarrow 0$.

Jelikož posloupnost t_n byla volena libovolně, máme díky předchozímu lemmatu $x(t_n) \rightarrow 0$ pro libovolnou $t_n \nearrow +\infty$, a tedy dle Heineovy věty $x(t) \rightarrow 0$, což jsme chtěli dokázat. \square

Na závěr si uvedeme větu, která nám poskytuje několik možných charakterizací pro asymptotickou stabilitu nulového řešení.

Věta 9.6 (Ekvivalentní podmínky pro rovnici (6)). *Je dána rovnice $x' = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

- (i) *0 je asymptoticky stabilní v $[0, +\infty)$;*
- (ii) *$\Re \lambda < 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$, neboli A je hurwitzovská;*
- (iii) *existují $\alpha, c > 0$ taková, že $\|e^{tA}\| \leq ce^{-\alpha t}$ pro všechna $t \geq 0$;*
- (iv) *existuje symetrická pozitivně definitní matice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že*

$$A^T B + BA = -I.$$

Poslední rovnosti se běžně říká *Ljapunovova rovnice*. Dále z bodu (iv) plyne, že $V(x) = x \cdot Bx$ je Ljapunovskou funkcí rovnice $x' = Ax$, pomocí níž můžeme sepsat alternativní důkaz věty o linearizované stabilitě (Věta 7.5).

konec 11. přednášky (9.5.2025)