Obyčejné diferenciální rovnice (NMMA336)

Petr Velička [*]
přednášející: doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D. [†]

LS 2024/25

[*]petrvel@matfyz.cz
[†]barta@karlin.mff.cuni.cz

1 Lokální existence řešení

Diferenciální rovnice nás doprovází v každé oblasti lidského života. Neexistuje obecná teorie, která by nám umožnila vyřešit všechny diferenciální rovnice najednou. Musíme se proto omezit jen na část rovnic.

Úmluva 1.1. V této přednášce budeme studovat systém rovnic

$$x' = f(x,t) \tag{1}$$

za trvalého předpokladu $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá.

Definice 1.2. Buď I otevřený interval. Funkci $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ nazveme *řešením* diferenciální rovnice (1) v Ω, jestliže pro všechna $t \in I$ platí

(i) $(x(t), t) \in \Omega$,

(ii) existuje vlastní $x'(t)$,

(iii) $x'(t) = f(x(t), t)$.

Takto definované řešení je nutně spojité a má spojitou derivaci (je třídy C^1), tzv. klasické řešení. Dále si poznamenejme, že platí tzv. princip nalepování: Pokud máme $x(t)$ řešení na (a, t_0) a na (t_0, b), pak už je řešením na celém (a, b). To plyne z toho, že $x'_-(t_0) = \lim_{t \to t_0^-} x'(t) = \lim_{t \to t_0^-} f(x(t), t) = f(x(t_0), t_0)$, přičemž tatáž rovnost platí i pro derivaci zprava.

Lemma 1.3. *Nechť I je otevřený interval, $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ spojitá splňující $(x(t), t) \in \Omega$ pro každé $t \in I$ a nechť $t_0 \in I$. Potom je ekvivalentní*

(i) x je řešení (1) splňující $x(t_0) = x_0$,

(ii) pro každé $t \in I$ platí $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds$.

Důkaz. Víme, že platí $x'(s) = f(x(s), s)$ pro všechna $s \in I$, což je spojitá funkce, kterou můžeme zintegrovat na $[t_0, t]$. Potom z Newtonova-Leibnizova vzorce máme $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds$. Tedy $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds$.

Pro důkaz opačné strany si uvědomíme, ze pro každé $t \in I$ je pravá strana diferencovatelná, tedy $x'(t) = f(x(t), t)$ a po dosazení $t = t_0$ dostáváme $x(t_0) = x_0$. $\square$

Teď si zadefinujeme několik pojmů, které charakterizují množiny funkcí, které se chovají jistým způsobem podobně nebo stejně.

Definice 1.4. Řekneme, že funkce množiny $M \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ jsou

1. *stejně spojité*, jestliže pro každé $x \in K$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ (společné pro všechny funkce) takové, že $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ pro všechna $y \in (x - \delta, x + \delta)$ a všechny $f \in M$.

2. *stejně omezené*, jestliže existuje $C > 0$ takové, že $\|f\| \leq C$ pro všechna $f \in M$.

Věta 1.5 (Arzela-Ascoli)**.** *Nechť funkce $x_n(t)$ jsou stejně omezené a stejně spojité na $[0, T]$. Potom z nich lze vybrat stejnoměrně konvergující posloupnost. (bez důkazu)*

Následující věta nám říká, že na nějakém okolí libovolného bodu existuje řešení zkoumané diferenciální rovnice.

Věta 1.6 (Peano)**.** *Nechť $(x_0, t_0) \in \Omega$. Pak existuje $\delta > 0$ a funkce $x(t) : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$, která je řešením (1) a splňuje $x(t_0) = x_0$.*

K důkazu této věty budeme potřebovat pomocné lemma:

Lemma 1.7. *Pokud $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ a f je omezená na Ω, pak pro každé $T > 0$ existuje řešení (1) na $(t_0 - T, t_0 + T)$ splňující $x(t_0) = x_0$.*

Důkaz. Řešme "porušenou" úlohu P_λ: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s-\lambda), s) ds$ pro $t > t_0$ kde dodefinováváme funkci $x(t) = x_0$ na intervalu $t \in [t_0 - \lambda, t_0]$. Na $I_1 := (t_0, t_0 + \lambda]$ definujeme $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \lambda), s) ds$. Na $I_2 := (t_0 + \lambda, t_0 + 2\lambda]$ definujeme $x(t)$ obdobně a indukcí pokračujeme dokud $t_0 + k\lambda$ nebude větší než T. Tímto je "porušená" úloha vyřešena na $[t_0 - \lambda, t_0 + T]$.

Položme $\lambda = \frac{1}{n}$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Pišme dále jen x_n namísto $x_{1/n}$, tedy řešení úloh $P_{\frac{1}{n}}$ tvoří posloupnost funkcí.

Ukážeme, že jsou stejně spojité a stejně omezené. Stejná omezenost plyne z toho, že $\|x_n(t)\| = \|x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s) ds\| \leq \|x_0\| + \| \int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s)\| ds$. Ale funkce f je omezená, tedy máme $\|x_n(t)\| \leq \|x_0\| + (T - t_0) \cdot K$, kde K je příslušná konstanta omezenosti f. Stejnou spojitost máme z odhadu $\|x_n(t) - x_n(r)\| = \| \int_r^t f(x(s - \frac{1}{n}), s) ds\| \leq |t - r| \cdot K$. V poslední nerovnosti jsme odhadli integrál součinem délky intervalu a konstantou omezenosti funkce f. Stačí položit $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, potom $\|x_n(t) - x_n(r)\| < \delta K = \varepsilon$.

Tedy dle Věty 1.5 můžeme z posloupnosti x_n vybrat stejnoměrně konvergentní podposloupnost x_{n_k}. Zbývá dokázat, že její limita řeší naši rovnici.

konec 1. přednášky (21.2.2025)

Zřejmě pro $k \to \infty$ platí $x_{n_k} \to x(t)$ a pokud $\int_{t_0}^t f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) ds$ konverguje k $\int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$, máme hotovo. Skutečně, $\| \int_{t_0}^t f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s), s) ds\| \leq \int_{t_0}^t \|f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s - \frac{1}{n_k}), s)\| + \|f(x(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s), s)\| ds$.

Jelikož f je spojitá, musí být stejnoměrně spojitá na kompaktní množině $[t_0, t_0 + T] \times \overline{B(0, r) \cap \Omega}$, jinými slovy platí, že pro $\varepsilon > 0$ existuje δ takové, že pro každé dva body x, y takové, že $\|x - y\| < \delta$ máme, že $|f(x, s) - f(y, s)| < \varepsilon$. Ze stejnoměrné konvergence x_{n_k} máme, že pro $\delta > 0$ existuje k_0 takové, že pro všechna $k \geq k_0$ platí $\|x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}) - x(s - \frac{1}{n_k})\| < \delta$. Jelikož x je spojitá, na kompaktním intervalu $[t_0, t_0 + T]$ je také stejnoměrně spojitá. Potom pro $\delta > 0$ existuje k_1 takové, že pro všechna $k \geq k_1$ platí $\|x(s - \frac{1}{n_k}) - x(s)\| < \delta$.

Potom pro všechna $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ platí, že náš integrál je menší nebo roven $\int_{t_0}^{t} \varepsilon + \varepsilon ds \leq T \cdot 2\varepsilon$, tedy jsme opravdu nalezli požadované řešení.

Existence řešení na $[t_0 - T, t_0]$ se ukáže podobně. $\square$

Důkaz Věty 1.6. Uvažujme dvě (uzavřené) koule kolem bodu (x_0, t_0) takové, že $K_1 \subsetneq K_2 \subset \Omega$. Definujeme $\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) \text{ v } K_1, \\ \text{spojitě v } K_2 \setminus K_1, \\ 0, (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus K_2. \end{cases}$ Tato funkce je na Ω spojitá a omezená.

Z Lemmatu 1.7 máme, že rovnice $x' = \tilde{f}(x,t)$ má řešení x splňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$. Nazveme toto řešení $\tilde{x}$. Potom ze spojitosti $\tilde{x}$ existuje $\delta > 0$ takové, že graf $\tilde{x}$ na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ leží v K_1. Restrikce $\tilde{x}$ na tento interval nám tedy dává řešení původní rovnice. $\square$

2 Jednoznačnost řešení

V této kapitole se budeme věnovat otázce jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic. V praxi to často požadujeme, například proto, aby nějaká simulace byla deterministická.

Definice 2.1. Řekneme, že rovnice (1) má v Ω vlastnost *globální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení $(x, I), (y, J)$ splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$, potom $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in I \cap J$.

Řekneme, že rovnice (1) má v Ω vlastnost *lokální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení $(x, I), (y, J)$ splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$ existuje $\delta > 0$ takové, že $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Věta 2.2. *Rovnice* (1) *má v* Ω *vlastnost globální jednoznačnosti právě tehdy, když má vlastnost lokální jednoznačnosti.*

Důkaz. Implikace směrem doprava je triviální (funkce, které se rovnají na celé množině se nutně musí rovnat i na nějakém okolí zkoumaného bodu).

Pro důkaz opačné implikace nechť máme dvě řešení $(x, I), (y, J)$ splňující $x(t_0) = y(t_0) = x_0$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$. Bez újmy na obecnosti nechť $I \cup J = (a, b)$. Položme $M = \{t : x(t) = y(t)\}$. Tato množina je díky předpokladu neprázdná, nechť $c := \sup M$.

Pro spor předpokládejme, že $c < b$. Potom platí $x(c) = \lim_{t \to c^-} x(t) = \lim_{t \to c^-} y(t)$, což se díky spojitosti y rovná $y(c)$. Tedy c je maximum M. Ale díky lokální jednoznačnosti existuje okolí bodu $(x(c), c)$, na kterém platí $x = y$. Tedy $x(c + \delta) = y(c + \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$, což je spor s tím, že $c = \sup M$. $\square$

Definice 2.3. Funkce f se nazývá *lokálně lipschitzovská vzhledem k* x v Ω, jestliže pro každé $(x_0, t_0) \in \Omega$ existují L a $\delta > 0$ takové, že

$$|f(x, t) - f(y, t)| \le L|x - y|$$

pro všechna $(x, t), (y, t) \in U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Věta 2.4. *Nechť* f *je lokálně lipschitzovská vzhledem k* x *v* Ω. *Potom rovnice* (1) *má v* Ω *vlastnost lokální jednoznačnosti.*

Důkaz. Volme $(x_0, t_0) \in \Omega$ a dvě řešení $(x, I), (y, J)$ taková, že $x(t_0) = y(t_0) = x_0$. Vezmeme $\delta_1 > 0$ tak, aby f byla lipschitzovská na δ_1-okolí (x_0, t_0). Nechť $\delta \le \frac{1}{2L}$ je takové, že navíc $\delta < \delta_1$ a t takové, aby $(x(t), t), (y(t), t) \in U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Potom platí

$$\|x(t) - y(t)\| = \|x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds - (x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s) ds)\| \le$$

$$\left| \int_{t_0}^{t} \|f(x(s), s) - f(y(s), s)\| ds \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} L \|x(s) - y(s)\| ds \right| \le L \cdot \gamma \cdot \delta \le \frac{\gamma}{2}$$

pro $\gamma := \sup \|x(s) - y(s)\|$. To platí pro všechna t, tedy $\gamma = \sup \|x(t) - y(t)\| \le \frac{\gamma}{2}$, z čehož plyne $\gamma = 0$, což implikuje rovnost $x(t)$ a $y(t)$. $\square$

Zavedeme značení $f \in C^1_x(\Omega)$, jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existují a jsou spojité v Ω pro každé i.

Lemma 2.5. *Nechť $f \in C^1_x(\Omega)$. Potom f je lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω.*

Důkaz. Mějme $(x_0, t_0) \in \Omega$. Nechť $\delta > 0$ je takové, že množina

$$M = \overline{U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)}$$

je podmnožinou Ω. Z kompaktnosti M máme, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou omezené konstantou K.

Dále mějme dva body $(x, t), (y, t) \in M$. Potom

$$\begin{aligned} |f(x,t) - f(y,t)| &= |f(x + 0(y-x), t) - f(x + 1(y-x), t)| = \\ &= |\,[f(x + s(y-x), t)]_0^1\,| = \left| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x + s(y-x), t) ds \right|. \end{aligned}$$

Pro derivaci f platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x + s(y-x), t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + s(y-x), t)(y_i - x_i).$$

Z toho máme, že

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x + s(y-x), t) ds \right| &\le \int_0^1 \sum_{i=1}^n K|y_i - x_i| ds = \sum_{i=1}^n K \max_i |y_i - x_i| = \\ &= nK \max |y_i - x_i| \le nK|y - x|, \end{aligned}$$

kde poslední nerovnost plyne z faktu, že $|y - x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2}$.

Tedy f je lokálně lipschitzovská s konstantou $n \cdot K$. $\square$

Rule of thumb (just for fun): platí f spojitá $\Rightarrow$ existuje řešení, $f \in C^1 \Rightarrow$ řešení je určeno jednoznačně.

konec 2. přednášky (28.2.2025)

3 Maximální řešení

V této kapitole se budeme věnovat otázce rozšíření řešení na co největší podmnožinu prostoru, v němž toto řešení hledáme. Bez újmy na obecnosti budeme dále předpokládat, že f je spojitá (ne nutně lipschitzovská) na Ω (což znamená, že nutně nemusíme mít jednoznačnost řešení).

Definice 3.1. Řešení $(\hat{x}, \hat{I})$ diferenciální rovnice (1) nazýváme *prodloužením* řešení (x, I), jestliže $\hat{I} \supset I$ a $\hat{x}(t) = x(t)$ pro každé $t \in I$. Řešení (x, I) se nazve *maximální*, jestliže nemá žádné netriviální ($\hat{I} \supsetneq I$) prodloužení.

Věta 3.2. *Každé řešení rovnice* (1) *má alespoň jedno maximální prodloužení.*

Důkaz. Mějme řešení (x, I) takové, že $I = (a, b)$. Budeme induktivně prodlužovat za bod b (na druhou stranu se to pak udělá analogicky). Položme $x_0 = x$, $b_0 = b$, $I_0 = I$. V n-tém kroku dostaneme řešení (x_n, I_n), kde $I_n = (a, b_n)$. Dále definujeme $\omega_n = \sup\{z > b_n; (x_n, I_n) \text{ lze prodloužit na } (a, z)\}$. Pokud příslušná množina je prázdná, jsme hotovi, neboť řešení již nejde prodloužit, tedy je maximální.

V opačném případě můžeme definovat $b_{n+1} = \frac{b_n+\omega_n}{2}$ (pokud $\omega_n < \infty$), případně $b_{n+1} = b_n+1$. Tímto postupem získáme rostoucí posloupnost b_n, která musí mít limitu. Označme tuto limitu β. Dále položme $\tilde{I} = (a, \beta)$, $\tilde{x} = x_n(t)$, pro všechna $t \in \tilde{I}$ zvolím n tak, aby $t \in I_n$. Na volbě n nezáleží, neboť na příslušných intervalech jsou funkce x_n stejné.

Dokážeme, že takto definované řešení $(\tilde{x}, \tilde{I})$ je maximální. Pro spor budeme předpokládat, že existuje rozšíření na $(a, \hat{\beta})$ takové, že $\hat{\beta} > \beta$. Okamžitě vidíme, že $\beta < \infty$. Vezmeme n takové, aby $\beta - b_n < \hat{\beta} - \beta$ a $\beta - b_n < 1$ (existuje díky tomu, že b_n konvergují k β). V tom případě (x_n, I_n) má prodloužení až do $\hat{\beta}$, tedy $\omega_n \geq \hat{\beta}$. Pak ale (pokud $\omega_n = \infty$) $b_{n+1} = b_n + 1 > \beta$, máme spor, případně pro ω_n konečné máme $b_{n+1} = \frac{b_n+\omega_n}{2} > \frac{2\beta-\hat{\beta}+\hat{\beta}}{2} = \beta$, opět jsme došli ke sporu. □

V případě f lipschitzovské se důkaz dá výrazně zjednodušit. Budeme uvažovat všechna prodloužení řešení x (platí jednoznačnost), dostaneme lineárně uspořádanou množinu, potom díky Zornovu lemmatu existuje maximální prvek.

Věta 3.3 (Picard)**.** *Nechť $f \in C^1_x(\Omega)$. Pak pro každé $(x_0, t_0) \in \Omega$ existuje právě jedno maximální řešení x diferenciální rovnice* (1) *v Ω splňující $x(t_0) = x_0$.*

Důkaz. Plyne z Peanovy věty (Věta 1.6) a Věty 3.2. Jednoznačnost plyne z rule of thumb v kapitole 2. □

Lemma 3.4. *Řešení (x, I) diferenciální rovnice* (1) *lze prodloužit za bod b právě tehdy, když platí všechny*

(i) $b < \infty$;

(ii) *existuje* $\lim_{t\to b^-} x(t) =: x_0 \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $(x_0, b) \in \Omega$.

Důkaz. Nutnost těchto podmínek plyne triviálně z podstaty prodloužení (cvičení). Dokážeme, že jde o podmínky postačující. Nechť tedy máme (x_0, b) jako novou počáteční podmínku, dle Peanovy vety existuje řešení $\hat{x}$ na $(b-\delta, b+\delta)$ splňující tuto počáteční podmínku. Definujeme $\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t), t < b \\ \tilde{x}(t), t \geq b \end{cases}$. Potom $\hat{x}$ je řešení (díky principu nalepování) a navíc prodlužuje x za bod b, což jsme chtěli dokázat. □

Na závěr si uvedeme jednu důležitou větu, která nám poskytne představu o tom, jak vypadají maximální řešení diferenciálních rovnic.

Věta 3.5 (Opuštění kompaktu)**.** *Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní, nechť (x, I) je maximální řešení rovnice* (1) *splňující $(x(t_0), t_0) \in K$ pro nějaké $t_0 \in I$. Potom existují $t_1 > t_0 > t_2$ taková, že $(x(t_1), t_1) \notin K$ a $(x(t_2), t_2) \notin K$.*

Důkaz. Pro spor budeme předpokládat, že takové t_1 neexistuje, chceme dojít ke sporu s maximalitou řešení. Mějme řešení x na (a, b) a $(x(t), t) \in K$ pro všechna $t \in [t_0, b)$. Ukážeme, že toto řešení můžeme prodloužit za b. Využijeme k tomu Lemma 3.4.

Zřejmě platí $b < \infty$ (díky kompaktnosti K). Dále dokážeme, že existuje $\lim_{i \to b^-} x(t)$ pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Mějme $s, t \in (t_0, b)$. Dále díky Lagrangeově větě o střední hodnotě máme

$$\|x(s) - x(t)\| \leq \|x'(\xi)\||s-t| = \|f(x(\xi), \xi)\||s-t| \leq M|s-t|,$$

kde poslední nerovnost plyne z toho, že funkce f je omezená na kompaktu K konstantou M. Nakonec $(x_0, b) = \lim_{t \to b^-}(x(t), t)$, tedy z uzavřenosti K máme, že $(x_0, b) \in K \subset \Omega$.

Zjistili jsme, že řešení lze prodloužit za bod b, což je spor s jeho maximalitou. Důkaz pro t_2 se udělá obdobně. □

4 Závislost na počáteční podmínce

Lemma 4.1 (Gronwall)**.** *Nechť $w(t), g(t)$ jsou nezáporné a spojité na nějakém intervalu I a nechť $t_0 \in I, K \geq 0$. Nechť pro každé $t \in I$ platí*

$$w(t) \leq K + \left| \int_{t_0}^{t} w(s)g(s)ds \right|.$$

Potom pro každé $t \in I$ platí

$$w(t) \leq K \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} g(s)ds \right| \right).$$

Důkaz. Definujeme $\Phi(t) := K + \int_{t_0}^{t} w(s)g(s)ds + \varepsilon$ pro $t > t_0$ (důkaz pro $t \leq t_0$ se udělá obdobně). Okamžitě z předpokladů vidíme, že $w(t) \leq \Phi(t)$. Zderivujeme funkci $\Phi(t)$, dostáváme $\Phi'(t) = w(t)g(t) \leq \Phi(t)g(t)$ což po vydělení $\Phi(t)$ (je nenulové díky přičtení ε) nám dává $\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq g(t)$, což můžeme přeintegrovat od t_0 do t, čímž dostaneme $\int_{t_0}^{t} \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} ds \leq \int_{t_0}^{t} g(s)ds$. Po vyčíslení integrálů dostaneme $\log \Phi(t) - \log \Phi(t_0) \leq \int_{t_0}^{t} g(s)ds$. Jelikož exp je rostoucí funkce, můžeme psát $\frac{\Phi(t)}{\Phi(t_0)} \leq \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds \right)$.

Nakonec dostáváme $w(t) \leq \Phi(t) \leq (K + \varepsilon) \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds \right)$. Požadované tvrzení získáme posláním ε do 0. $\square$

konec 3. přednášky (7.3.2025)

Lemma 4.2. *Nechť f je globálně L-lipschitzovská v Ω vzhledem k x. Potom pro libovolná dvě řešení $(x, I), (y, J)$ v Ω a body $t, t_0 \in I \cap J$ platí*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| \exp(L|t - t_0|).$$

Důkaz. Můžeme psát

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &= \left\| x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds - (y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)ds) \right\| \leq \\ &\leq \|x(t_0) - y(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^{t} |f(x(s), s) - f(y(s), s)| \, ds \right\| \leq \\ &\leq \|x(t_0) - y(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^{t} L|x(s) - y(s)|ds \right\|. \end{aligned}$$

Poté z Gronwallova lemmatu dostáváme, že

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| e^{|\int_{t_0}^{t} L ds|} = \|x(t_0) - y(t_0)\| e^{|t - t_0|L},$$

kde funkci $w(s)$ ze znění lemmatu odpovídá výraz $\|x(s) - y(s)\|$ a $K = \|x(t_0) - y(t_0)\|$. $\square$

Jednoduchým důsledkem tohoto lemmatu je mj. jednoznačnost řešení (stačí uvažovat řešení s $x(t_0) = y(t_0)$).

Definice 4.3. Nechť f je spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω. Potom definujeme *řešicí funcki* $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n$ předpisem $\varphi(t; t_0, x_0) := x(t)$, kde $x : I \to \mathbb{R}^n$ je řešení splňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$ a $t \in I$. Zde G je maximální možná, tj. obsahuje všechny trojice $(t; t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2}$ pro něž výraz $\varphi(t; t_0, x_0)$ má smysl.

Například, uvažujeme-li rovnici $x'(t) = x(t)$. Obecným řešením této rovnice je funkce $x(t) = ce^t$, vyřešením rovnice s počáteční podmínkou dostaneme řešicí funkci $\varphi(t; t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}$.

Věta 4.4. *Množina G z předchozí definice je otevřená a φ je spojitá na G.*

Důkaz. Intermezzo: otevřenost G znamená, že pro každé $(x_0, t_0) \in \Omega$ a t existuje $r > 0$ takové, že pokud $\|(y_0, s_0) - (x_0, t_0)\|$ je malé, potom řešení y procházející bodem (y_0, s_0) je definované v bodech $(t-r, t+r)$, spojitost pak odpovídá tomu, že toto řešení bude po celou dobu "blízko" toho původního.

Bez újmy na obecnosti nechť $t_0 > t$. Vezměme $(t; t_0, x_0) \in G$, buď x maximální řešení s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. Pak $[t_0, t] \subset D_x$ (řešení je definováno na celém tomto intervalu). Vezměme $\delta > 0$ tak malé, aby $[t_0, t + 2\delta] \subset D_x$ (to můžeme, neboť D_x je otevřená) a zároveň $K_\delta := \{(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : s \in [t_0 - \delta, t + \delta] \wedge |y(s) - x(s)| \leq \delta\} \subset \Omega$. Takto definovaná množina K_δ je kompaktní a tedy f je na K_δ omezená konstantou c_0 (spojitá funkce na kompaktu) díky čemuž z lokální lipschitzovskosti plyne globální L-lipschitzovskost vzhledem k x.

Dokážeme, že řešení "blízko" toho původního neopustí "rouru" K_δ. Zvolme $\varepsilon > 0$ takové, aby $\varepsilon < \frac{\delta}{2(1+c_0)e^{L(t-t_0+2\delta)}}$. Vezměme y_0, s_0 tak, aby $|s_0 - t_0| < \varepsilon$, $|x_0 - y_0| < \varepsilon$. Dále vezmeme y maximální řešení s podmínkou $y(s_0) = y_0$. Chceme dokázat, že y je definované aspoň na intervalu $[s_0, t + \delta]$ a platí $|y(s) - x(s)| \leq \delta$ pro všechna $s \in [s_0, t + \delta]$.

Můžeme psát

$$|y(s_0) - x(s_0)| \leq |y(s_0) - x(t_0)| + |x(t_0) - x(s_0)| \leq$$

$$|y_0 - x_0| + |x'(\xi)||t_0 - s_0| \leq (1 + c_0)\varepsilon,$$

kde ξ je konstanta z Lagrangeovy věty, která ve vícerozměrném prostoru platí pouze jako neostrá nerovnost.

Dále odhadujme (použijeme Lemma 4.2)

$$|y(s) - x(s)| \leq |y(s_0) - x(s_0)|e^{L|s-s_0|} \leq (1 + c_0)\varepsilon e^{L|s-s_0|} \leq (1 + c_0)\varepsilon e^{L(t-t_0+2\delta)},$$

kde uvažujeme pouze body s, pro které existuje $y(s)$ a y leží v K_δ na $[s_0, s]$. Z volby ε dostáváme navíc

$$|y(s) - x(s)| \leq (1 + c_0)\varepsilon e^{L(t-t_0+2\delta)} < \frac{\delta}{2}. \tag{2}$$

Maximální řešení y opustí kompakt (Věta 3.5) K_δ někde za časem s_0. Označme γ čas prvního opuštění (přesněji řečeno infimum všech časů, kdy to už není v tom kompaktu). Na intervalu $[s_0, \gamma]$ platí odhad (2), tedy $|y(\gamma) - x(\gamma)| < \frac{\delta}{2}$, z čehož máme $\gamma = t + \delta$, to znamená, že kompakt nemůžeme opustit jinak než za časem t. Tím jsme dokázali otevřenost G.

Dokážeme spojitost φ na G. Vezměme dva body $(t; t_0, x_0)$ a $(s; s_0, y_0)$ jako minule a uvažujme rozdíl

$$|\varphi(t; t_0, x_0) - \varphi(s, s_0, y_0)| \leq |\varphi(t; t_0, x_0) - \varphi(s; t_0, x_0)| +$$

$$|\varphi(s; t_0, x_0) - \varphi(s; s_0, y_0)| \leq |x(t) - x(s)| + |x(s) - y(s)| \leq$$

$$c_0(t - s) + |x(s_0) - y(s_0)e^{L|s-s_0|}| \leq c_0|t - s| + (1 + c_0)e^{L|s-s_0|}|x_0 - y_0|,$$

čímž jsme ukázali lipschitzovskost, a tedy spojitost φ na G. □

Z hlediska praktických aplikací často uvažujeme rovnici (1) ve tvaru $x' = f(x, t, \lambda)$ závislém na hodnotě parametru λ. Přidejme druhou rovnici $\lambda' = 0$ a počáteční podmínky $x(t_0) = 0$ a $\lambda(t_0) = \lambda_0$, čímž jsme závislost na parametru převedli na závislost na počáteční podmínce (v případě, že f je závisí na λ lipschitzovsky).

Označme pro účely následující věty $\frac{\partial}{\partial w}$ derivaci ve směru $w \in \mathbb{R}^n$ dle proměnné x_0.

Věta 4.5. *Nechť $f \in C^1_x(\Omega), w \in \mathbb{R}^n$. Potom $\frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ existuje v každém bodě G. Označíme-li $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ a $u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$, pak funkce u je řešením rovnice ve variacích*

$$u' = \nabla_x f(x(t), t)u, u(t_0) = w. \tag{3}$$

konec 4. přednášky (14.3.2025)

Důkaz. Větu dokážeme za silnějšího předpokladu $f \in C^2_x(\Omega)$.

Vezmeme pevně bod (x_0, t_0) a víme, že tímto bodem prochází právě jedno maximální řešení, označíme ho $x(t)$. Dále označme $A(t) = \nabla_x f(x(t), t)$. Potom $A(t)$ je matice $n \times n$. Vezmeme pevné $w \in \mathbb{R}^n$ a označme $u(t)$ maximální řešení počáteční úlohy (3).

Dle Věty 5.4 existuje právě jedno řešení a je definované na celém intervalu, kde je definovaná $A(t)$. Chceme dokázat, že $u(t) = \frac{\partial}{\partial w}\varphi(t, t_0, x_0)$. Z definice máme, že

$$\frac{\partial}{\partial w}\varphi(t, t_0, x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0).$$

Vezmeme t pevné tak, aby $(t, t_0, x_0) \in G$, tedy $x(t)$ je dobře definované. Vezmeme dost malé h tak, aby $\varphi(t, t_0, x_0 + hw)$ bylo definované. Položme $y_h(t) := \varphi(t, t_0, x_0 + hw)$.

Definujeme funkci $\eta_h(t) = \frac{1}{h}(y_h(t) - x(t)) - u(t)$. Ukážeme, že $\lim_{h \to 0} \eta_h(t) = 0$. Pišme

$$\eta_h'(t) = \frac{1}{h}(y_h'(t) - x'(t)) - u'(t) = \frac{1}{h}(f(y_h(t), t) - f(x(t), t)) - \nabla_x f(x(t), t)u(t).$$

Použijeme Taylorův rozvoj prvního řádu pro funkci f, dostaneme

$$\eta_h'(t) = \frac{1}{h}(\nabla_x f(x(t),t)(y_h(t) - x(t)) +$$

$$\frac{1}{2}(y_h(t) - x(t))^T \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x(t),t)(y_n(t) - x(t)) - \nabla_x f(t, x(t))u(t).$$

Tedy máme, že

$$\eta_h'(t) = \nabla_x f(x(t),t) \left[\frac{1}{h}(y_h(t) - x(t)) - u(t) \right] + \frac{1}{h} z_n(t).$$

Potom $\eta_h'(t) = A(t)\eta_h(t) + z_n(t)$.

Pro h malé je vše v K_δ z Věty 4.4. Na K_δ jsou $\nabla_x f$ a $\nabla_x^2 f$ omezené $\leq M$. Zde předpokládáme, že $f \in C_x^2(\Omega)$. Potom z Lemmatu 4.2 můžeme psát

$$\|z_h(t)\| \leq \frac{1}{2} M \|y_h(t) - x(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} M \|y_h(t_0) - x(t_0)\|^2 e^{2M|t-t_0|} \leq Ch^2 \|w\|^2.$$

Uvědomíme si, že $\eta_h(t_0) = 0$ a napíšeme integrální rovnici odpovídající diferenciální rovnici pro η_h'

$$\eta_h(t) = \eta_h(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)\eta_h(s) + z_n(s) ds,$$

Tedy $\|\eta_h(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t M\|\eta_h(s)\| + Chds \right| = C|t - t_0|h + \left| \int_{t_0}^t M\|\eta_h(s)ds \right|$. Použijeme Gronwallovo lemma (Lemma 4.1), dostaneme.

$$\|\eta_h(t)\| \leq \tilde{C} h e^{M|t-t_0|},$$

tedy $\eta_h(t) \to 0$ pro $h \to 0$, čímž je důkaz ukončen. □

Ukážeme si jednu aplikaci následující věty pro výpočet derivace řešící funkce.

Příklad 4.6. Mějme rovnici $x' = x$, její řešící funkce má tvar $\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}$. Potom $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(t, t_0, x_0) = e^{t-t_0}$. Totéž můžeme spočítat z předchozí věty. Hledaná funkce řeší diferenciální rovnici $u' = u$ s počáteční podmínkou $u(t_0) = t$. Jejím řešením je e^{t-t_0}, což jsme chtěli dokázat.

Za uvedených předpokladů dokonce $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}w}$ závisí spojitě na x_0 tj. řešicí funkce je diferencovatelná (má totální diferenciál) vzhledem k x_0. Lze též ukázat, že φ je diferencovatelná vůči t a t_0.

5 Lineární rovnice

Definice 5.1. *Normu matice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme

$$\|A\| = \sup\{|Ax|; x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\},$$

kde $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ je norma vektoru $x \in \mathbb{R}^n$.

Věta 5.2 (Vlastnosti normy matice)**.** *Nechť* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Potom:*

(i) $\|A\| \geq 0$ *a* $\|A\| = 0$ *právě když* $A = 0$.

(ii) $\|aA\| = |a|\|A\|$ *pro všechna* $a \in \mathbb{R}$.

(iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

(iv) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

(v) $|Ax| \leq \|A\||x|$ *pro* $x \in \mathbb{R}^n$.

(vi) Je-li A *regulární, pak* $Ay \geq \frac{|y|}{\|A^{-1}\|}$ *pro* $y \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz. První tři vlastnosti říkají, že operátor $\|\cdot\|$ je norma (cvičení).

Dokážeme vlastnost (v). Případ $x = 0$ je triviální, nechť tedy $x \neq 0$. Položme $y = \frac{x}{|x|}$. Potom můžeme psát

$$|Ax| = |A(|x|y)| = ||x|Ay| = |x||Ay| \leq |x|\|A\|.$$

K důkazu vlastnosti (iv) můžeme psát $|ABx| \leq \|A\|\|B\||x|$, kde jsme dvakrát použili již dokázanou vlastnost (v). Potom

$$\|AB\| = \sup_{|x|\leq 1} |ABx| \leq \sup_{|x|\leq 1} \|A\|\|B\||x| \leq \|A\|\|B\| \cdot 1.$$

Nakonec, pro vlastnost (vi) položme $v := Ay$, tedy $y = A^{-1}v$. Potom

$$|y| = |A^{-1}v| \leq \|A^{-1}\||v| = \|A^{-1}\||Ay|, \text{ tedy } |Ay| \geq \frac{|y|}{\|A^{-1}\|},$$

čímž je důkaz ukončen. □

Definice 5.3. *Lineární rovnicí* rozumíme rovnici

$$x' = A(t)x + g(t), x(t_0) = x_0, \tag{4}$$

kde $A(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^{n\times n}, g(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojité.

V přednášce MA3 jste již studovali tento typ rovnic, teď se však budeme věnovat obecnějšímu případu, kdy A a g závisí na t.

Věta 5.4. *Nechť* $t_0 \in (a, b), x_0 \in \mathbb{R}^n$ *je dáno. Pak existuje jediné řešení rovnice* (4) *definované na celém* (a, b) *splňující počáteční podmínku* $x(t_0) = x_0$.

Důkaz. Rovnice (4) je ekvivalentní rovnici (1), kde $f(x,t) = A(t) \cdot x + g(t)$. Můžeme psát

$$|f(x,t) - f(y,t)| = |A(t)x - A(t)y| \leq \|A(t)\||x-y|.$$

Funkce $A(t)$ je omezená na kompaktních intervalech, tedy f je lipschitzovská. Tedy pro každou počáteční podmínku existuje právě jedno maximální řešení. Dokážeme, že toto řešení je definované na celém (a,b).

konec 5. přednášky (21.3.2025)

Předpokládejme, že řešení není definované na celém (a,b). Potom existují $\alpha, \beta \in (a,b)$ takové, že řešení je definováno na (α, β). Toto řešení musí opustit každý kompakt, tedy mimo jiné i $K = [t_0, \beta] \times \overline{B(0,R)}$, kde R je dostatečně velké. Řešení x splňuje

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^{t} (\|A(s)\||x(s)| + |g(s)|)ds \overset{\substack{\|A(s)\| \leq L \\ |g(s)| \leq \tilde{C} \\ |x(t_0)| = C}}{\leq} C + \int_{t_0}^{t} (L|x(s)| + \tilde{C})ds \leq$$

Z Gronwallova lemmatu dostaneme

$$\leq C + \tilde{C}(\beta - t_0) + \int_{t_0}^{t} L|x(s)|ds \implies |x(t)| \leq \underbrace{C + \tilde{C}(\beta - t_0)e^{L(\beta - t_0)}}_{R}.$$

Došli jsme ke sporu s Větou 3.5, neboť řešení x nemůže opustit kompakt K. $\square$

Důležitá poznámka: řešení existuje globálně na oboru spojitosti $A(t), g(t)$. Ve skutečnosti předchozí věta i pro nelineární rovnice $x' = f(x,t)$ se sublineární pravou stranou, tj. pokud $|f(x,t)| \leq a(t)|x| + g(t)$, kde $a(\cdot), g(\cdot)$ jsou spojité.

Definice 5.5. *Homogenní rovnicí* rozumíme rovnici (4) pro $g(t) \equiv 0$, tj.

$$x' = A(t)x, x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

Použijeme znalosti lineární algebry k tomu, abychom mohli formalizovat postup řešení lineárních ODR.

Věta 5.6. *Množina $\mathcal{R}_H$ řešení homogenní rovnice* (5) *bez zadané počáteční podmínky tvoří n-dimenzionální podprostor $C^1((a,b), \mathbb{R}^n)$.*

Důkaz. Jádro lineárního zobrazení $Lx := x' - Ax$ je vektorový prostor. Dokážeme, že má dimenzi n. Nechť $i = 1, \ldots, n$ a $x(t_0) = e_i$, pro tuto počáteční podmínku dostaneme řešení x^i. Potom $\{x^1, \ldots, x^n\}$ tvoří bázi prostoru všech řešení. Skutečně, tyto vektory jsou lineárně nezávislé, mějme lineární kombinaci $c_1x^1 + \cdots + c_nx^n = 0$, speciálně v čase t_0 máme $c_1e^1 + \cdots + c_nx^n$, což implikuje, že $c_i = 0$ pro každé i. Navíc vezmeme libovolné řešení $z' = A(t)z$, opět zkoumejme stav v čase t_0. Máme $z(t_0) = d_1e^1 + \ldots d_ne^n$ pro vhodná $d_1, \ldots, d_n$. Definujme $y(t) := d_1x^1(t) + \cdots + d_nx^n(t)$, tedy y řeší rovnici $y' = Ay$ a $y(t_0) = z(t_0)$, z čehož díky jednoznačnosti řešení dostáváme $y = z$. Nalezli jsme n-prvkovou bázi, tedy prostor $\mathcal{R}_H$ má dimenzi n. $\square$

Definice 5.7. *Fundamentální systémem* pro (5) rozumíme libovolnou bázi $\mathcal{R}_H$. Matice, jejíž sloupce tvoří prvky libovolného fundamentálního systému, nazýváme *fundamentální maticí* pro (5).

Uvedeme si několik poznámek k definici fundamentální matice. Je-li $\Phi(t)$ nějaká fundamentální matice, pak

- $\Phi(t)$ splňuje "maticový tvar (5)", tedy $\Phi'(t) = A\Phi(t)$.
- $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (a, b)$.
- Obecné řešení (5) má tvar $\Phi(t)c$, kde $c \in \mathbb{R}^n$.
- $\tilde{\Phi}(t) := \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ je také fundamentální matice, která navíc splňuje $\tilde{\Phi}(t_0) = I$.

Věta 5.8 (Variace konstant)**.** *Nechť* $\Phi(t)$ *je libovolná fundamentální matice pro* (5)*. Potom řešení nehomogenní rovnice* (4) *lze napsat ve tvaru*

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)g(s)ds$$

pro $t \in (a, b)$

Důkaz. Zderivováním dostaneme $x' = A(t)x + g(t)$, dále stačí ověřit počáteční podmínku dosazením. □

Definice 5.9. *Wronského determinant* (Wronskián) rovnice (5) je reálná funkce $w(t) := \det(\Phi(t))$, kde Φ je libovolná fundamentální matice příslušné rovnice.

Věta 5.10 (Liouvilleova formule)**.** *Nechť* $\Phi(t)$ *je maticové řešení* (5) *a nechť* $w(t) = \det \Phi(t)$*. Potom*

$$w(t) = w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s) ds\right),$$

kde $\operatorname{tr} A$ *je stopa matice* A*.*

Důkaz. Dokazovaná rovnost je ekvivalentní s

$$w'(t) = w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s) ds\right) \operatorname{tr} A(t)$$

a tedy

$$w'(t) = \operatorname{tr} A(t) w(t), w(t_0) = w(t_0)$$

Dále

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \Phi(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\sigma} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} \Phi_{1,\sigma(1)}(t) \dots \Phi_{n,\sigma(n)}(t) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} \overbrace{\Phi \dots \Phi}^{\Phi' \text{ je v } k\text{-tém řádku}} = \sum_{k=1}^{n} \det D_k,$$

kde D_k je matice Φ se zderivovaným k-tým řádkem.

konec 6. přednášky (28.3.2025)

Dále si uvědomíme, že $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, přičemž násobení maticí zleva provádí řádkové úpravy na matici $\Phi(t)$. Konkrétně $\varphi_k^{j\prime}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ki}(t)\varphi_i^j(t)$.

Platí $\det D_k = A_{kk}(t) \det \Phi(t)$ (vlastnosti determinantu). Z toho dostáváme, že $w'(t) = \det \Phi(t) \sum_{k=1}^n A_{kk}(t) = w(t) = \operatorname{tr} A(t)$. $\square$

Pokud $\operatorname{tr} A(t) > 0$, potom wronskián roste, $= 0$ množina možných hodnot řešení zachovává objem a pro $\operatorname{tr} A(t) < 0$ v průběhu času objem klesá.

Příklad 5.11. Řešme rovnici

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dostáváme $x' = 2x, y' = -2y$, tedy $x = x(0)e^{2t}, y = y(0)e^{-2t}$. Nechť $x(0), y(0) \in [0,1]$. Potom pro fixní $t_1 > 0$ dostáváme $x(t_1) \in [0, e^{2t_1}], y(t_1) \in [0, e^{-2t_1}]$. Obsah tohoto obdélníku je $e^{2t_1}e^{-2t_1} = 1$. Tedy, obsah je konstantní, což odpovídá pozorování z věty, neboť stopa matice ze zadání je nulová.

Příklad 5.12. Mějme rovnici $x' = f(t,x)$. Ukážeme si, že roli stopy matice z předchozího příkladu tu hraje divergence f v proměnné x.

6 Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Definice 6.1. *Lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty* a s maticí $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je rovnice

$$x' = Ax. \tag{6}$$

Myšlenkou studia těchto rovnic je analogie s rovnicí $x' = ax$ pro $a \in \mathbb{R}$, kde řešením je $x(t) = x_0 e^{at}$. Ukážeme, že rovnice (6) má řešení $x(t) = e^{At}x_0$.

Definice 6.2. *Maticovou exponenciálu* definujeme předpisem

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

s konvencí $A^0 = I$.

Řada s definice maticové exponenciály je dobře definovaná, neboť $\|\frac{1}{k!}A^k\| \leq \frac{1}{k!}\|A\|^k$, přičemž $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}c^k = e^c$ konverguje pro každé $c \in \mathbb{R}$. Navíc z tohoto odhadu dostáváme $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

Příklad 6.3. Nechť $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Potom

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{2^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{1^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Věta 6.4. *Nechť $U(t) = e^{tA}$. Pak $U(t)$ je fundamentální matice rovnice* (6) *a platí $U(0) = I$.*

Důkaz. Řada konverguje pro všechny matice, tedy i pro matici tA, což znamená, že U je dobře definovaná. Platí

$$[U(t)]_{ij} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}[A^k]_{ij} t^k.$$

Toto je mocninná řada s poloměrem konvergence ∞, tedy ji můžeme derivovat člen po členu (nultý člen se zderivuje na nulu).

$$U'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{k-1} = Ae^{tA} = AU(t).$$

Vytknutí A můžeme provést, neboť operátor násobení maticí A je spojitý.

Závěr ohledně $U(0)$ plyne z toho, že pro $t = 0$ je první člen sumy roven jednotkové matici a všechny ostatní jsou nulové. □

Z obecného tvaru řešení dostáváme, že $x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$, přičemž $t_0 = 0$ a tedy $U(0) = U^{-1}(0) = I$. Z toho již plyne $x(t) = e^{tA}x_0$.

Věta 6.5 (Vlastnosti maticové exponenciály)**.** *Platí následující vlastnosti maticové exponenciály*

(i) $e^{aI} = e^a I$ *pro* $a \in \mathbb{R}$*;*

(ii) *pokud* $AB = BA$*, pak* $e^{A+B} = e^A e^B$*;*

(iii) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$*;*

(iv) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$*, speciálně* e^A *je vždy regulární.*

Důkaz. Budeme dokazovat postupně.

(i) Dosazením dostáváme

$$e^{aI} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{k!} I = I \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k!} I e^a.$$

(ii) Nejprve ukážeme, že $Be^{tA} = e^{tA}B$. To plyne z toho, že

$$Be^{tA} = B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} B \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} B = e^{tA}B.$$

Potom z definice $U(t) = e^{tA}e^{tB}$ a $U'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A + B)U(t)$. Tedy $U(t)$ splňuje rovnici $x'(t) = (A+B)x(t)$, kterou také splňuje $\tilde{U}(t) = e^{(A+B)t}$. Z jednoznačnosti řešení této rovnice dostáváme $e^A e^B = e^{A+B}$.

(iii) Z definice rozepíšeme

$$e^{C^{-1}AC} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (C^{-1}AC)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} C^{-1} A^k C =$$

$$C^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k C = C^{-1} e^A C.$$

(iv) Okamžitě plyne z (ii), neboť $e^A e^{-A} = e^0 = I$

□

Důsledek 6.6 (Variace konstant pro (6))**.** *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$*,* $g(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá,* $t_0 \in (a, b)$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *jsou dána. Potom řešení rovnice*

$$x' = Ax + g(t), x(t_0) = x_0$$

má tvar

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} g(s) ds.$$

Další otázka, kterou se budeme zabývat, je hledání maticové exponenciály. K tomu použijeme takzvaný Jordanův kanonický tvar matice.

Věta 6.7. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, J její Jordanův kanonický tvar, $A = VJV^{-1}$ a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ je diagonála J. Potom $e^{tA} = Ve^{tJ}V^{-1}$, kde matici e^{tJ} definujeme jako diag$(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$, přičemž $P(t)$ je blokově diagonální matice se stejně velkými a stejně uspořádanými bloky jako J a blok velikosti k matice $P(t)$ je roven*

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(k-2)!}t^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Důsledek 6.8. *Buď $a = \max\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ a m velikost největší Jordanovy buňky příslušné k vlastnímu číslu $\Re\lambda = a$. Pak existuje $M > 0$, že $\|e^{tA}\| \le Mt^{m-1}e^{at}$ pro všechna $t \ge 0$. Speciálně, pro všechna $\tilde{a} > a$ existuje $\tilde{M} > 0$ takové, že $\|e^{tA}\| \le \tilde{M}e^{t\tilde{a}}$.*

konec 7. přednášky (4.4.2025)

Definice 6.9. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a její spektrum $\sigma(A)$ definujeme $\sigma_-(A) = \sigma(A) \cap \{\Re < 0\}$, $\sigma_0(A) = \sigma(A) \cap \{\Re = 0\}$, $\sigma_+(A) = \sigma(A) \cap \{\Re > 0\}$. Příslušné podprostory generované příslušnými (zobecněnými) vlastními vektory značíme $X_-(A), X_0(A), X_+(A)$ (nazýváme je *stabilní, centrální* a *nestabilní* podprostor).

Zřejmě $\mathbb{R}^n = X_+(A) \oplus X_-(A) \oplus X_0(A)$. Tyto prostory jsou invariantní vzhledem k A a též vzhledem k e^{tA}.

Věta 6.10 (Asymptotické chování podprostorů)**.** *Nechť A je daná matice. Potom existují kladná α, β, M a c taková, že platí:*

1. *Pokud $x_0 \in X_-(A)$, pak $|e^{tA}x_0| \le ce^{-\alpha t}|x_0|$ pro každé $t \ge 0$.*
2. *Pokud $x_0 \in X_+(A)$, pak $|e^{tA}x_0| \le ce^{\beta t}|x_0|$ pro každé $t \le 0$.*
3. *Pokud $x_0 \in X_0(A)$, pak $|e^{tA}x_0| \le c(1 + |t|)^M|x_0|$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Nejdříve nechť $x_0 \in X_-(A)$. Potom $x_0 = \sum_{i=1}^k a_i v_i$, kde v_i jsou zobecněné vlastní vektory příslušné $\lambda_i \in \sigma_-(A)$. Dále máme, že $e^{tA}x_0 = Ve^{tJ}V^{-1}x_0$. Spočteme $V^{-1}x_0$. Jestliže v je sloupec matice V, potom $V^{-1}v$ je jeden ze sloupců jednotkové matice, tedy má tvar $(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T$. Tedy $V^{-1}x_0$ má nenulové hodnoty jen v řádcích příslušných $\Re\lambda < 0$. Můžeme odhadovat normu

$$\|e^{tA}x_0\| \le \|V\| \|e^{tJ}\text{: řádky s } e^{-at}\| \|V^{-1}x_0\| \le Ce^{-\alpha t}\|x_0\|.$$

Zde jsme využili faktu, že "polynom" $e^{-\lambda t}t^k$ lze odhadnout $e^{-\lambda t}t^k \le e^{(-\lambda+\varepsilon)t}c$ pro vhodná c a ε.

Důkaz ostatních implikací je podobný. □

V předchozí větě platí i opačná implikace, a to ve smyslu, že uvedené vlastnosti charakterizují dané podprostory.

7 Stabilita

Lemma 4.2 nám teoreticky poskytuje spojitost řešící funkce v proměnné x_0, pro větší t však kvůli exponenciálnímu růstu nemá význam. Budeme proto zkoumat okolnosti, za nichž existují odhady, které se nezhoršují pro $t \to \infty$.

Definice 7.1. Nechť $f = f(x,t)$ je spojitá v otevřené $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ a navíc lokálně lipschitzovská vůči x. Nechť $\Omega \supset \{0\} \times I$ kde $I = (\tau, \infty)$ a nechť $f(0,t) = 0$ pro všechna $t \in I$. Řekneme, že nulové řešení rovnice (1) ($x' = f(t,x)$) je

(i) *stabilní*, jestliže pro všechna $t_0 \in I$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $|x_0| < \delta$ platí, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno a splňuje $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pro libovolné $t \geq t_0$;

(ii) *nestabilní*, jestliže není stabilní;

(iii) *lokální atraktor*, jestliže $\forall t_0 \in I$ existuje $\eta > 0$ tak, že pro $|x_0| < \eta$ je definován výraz $\varphi(t, t_0, x_0)$ pro všechna $t \geq t_0$ a navíc $\varphi(t, t_0, x_0) \to 0$ pro $t \to +\infty$;

(iv) *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc lokální atraktor;

(v) *uniformně stabilní*, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $t_0 \in I$ z $|x_0| < \delta$ plyne, že výraz $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definován a splňuje $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pro $t \geq t_0$;

(vi) *uniformě asymptoticky stabilní*, jestliže je uniformně stabilní a navíc existuje $\eta < 0$ takové, že $\forall \varepsilon > 0$ existuje $T > 0$ takové, že pro všechna $t_0 \in I$ z $|x_0| < \eta$ plyne, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno pro všechna $t \geq t_0$ a $|\varphi(t, t_0, x_0)| \leq \varepsilon|$ pro $t \geq t_0 + T$.

Pojem asymptotické stability zavádíme proto, že lokální atraktor nutně nemusí implikovat stabilitu. Konstrukci takového řešení můžeme nahlédnout pomocí tzv. Vinogradovova systému. V případě autonomní rovnice splývají pojmy (asymptotické) stability a uniformní (asymptotické) stability, neboť můžeme psát $\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, 0, x_0)$.

Obecněji řečeno, řešení $\tilde{x}(t)$ rovnice $x' = f(x,t)$ se nazve stabilní (resp. uniformně stabilní atd.), jestliže má analogickou vlastnost nulové řešení rovnice $u' = g(u,t)$ kde $g(u,t) = f(\tilde{x}(t) + u, t) - f(\tilde{x}(t), t)$.

V případě řešení lineární rovnice (4), tj. $x' = A(t)x + g(t)$ je stabilita ekvivalentní stabilitě libovolného řešení příslušné homogenní rovnice (5).

Věta 7.2. *Je dána rovnice $x' = A(t)x$, kde $A(t)$ je spojitá v $I = (\tau, \infty)$. Nechť $\Phi(t)$ je (libovolná) fundamentální matice. Potom nulové řešení je*

1. *stabilní, právě když pro $\forall t_0 \in I$ je $\|\Phi(t)\|$ omezená v $[t_0, \infty)$;*

2. *asymptoticky stabilní, právě když $\|\Phi(t)\| \to 0$ pro $t \to \infty$;*

3. *uniformně stabilní, právě když existuje $c > 0$ takové, že pro všechna $s < t \in I$ je $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq c$.*

4. *uniformně asymptoticky stabilní, právě když existují kladná α a c taková, že pro všechna $s < t \in I$ je $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq ce^{-\alpha(t-s)}$.*

Věta 7.3. *Nechť A je konstantní matice. Potom nulové řešení rovnice $x' = Ax$ je*

1. *(uniformně) stabilní, právě když $\Re\lambda \leq 0$ pro všechna vlastní čísla $\lambda \in \sigma(A)$, přičemž $\Re\lambda = 0$ pouze pro polojednoduchá vlastní čísla (tedy příslušné Jordanovy buňky mají velikost 1).*

2. *(uniformě) asymptoticky stabilní, právě když $\Re\lambda < 0$ pro všechna vlastní čísla $\lambda \in \sigma(A)$.*

Důkaz. Plyne ihned z tvaru maticové exponenciály. □

Matice A splňující $\Re\lambda < 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$ se nazývá *Hurwitzowská.*

Lemma 7.4. *Je dána rovnice $x' = Ax + r(x,t)$. Nechť existují kladná α, c tak, že $\|e^{tA}\| \leq ce^{-t\alpha}$ pro $t \geq 0$. Nechť dále $r(x,t) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a $|r(x,t)| \leq \gamma|x|$ pro všechna x, y kde $\gamma < \frac{\alpha}{c}$. Pak každé řešení splňuje*

$$|x(t)| \leq c|x(t_0)| \exp(-\beta(t - t_0))$$

pro $t \geq t_0$, kde $\beta = \alpha - c\gamma > 0$.

Důkaz. Nechť x řeší $x' = Ax + r(x,t)$ na $(0, +\infty)$. Pak x řeší $x' = Ax + g(t)$, kde $g(t) := r(x(t), t)$. Z variace konstant (Důsledek 6.6) dostáváme, že

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}g(s)ds.$$

Pro $t > t_0$ dostaneme

$$\|x(t)\| \leq ce^{-(t-t_0)\alpha}\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} ce^{-(t-s)\alpha}\gamma\|x(s)\|ds.$$

Jinými slovy,

$$\|x(t)\|e^{t\alpha} \leq ce^{t_0\alpha}\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} ce^{-(t-s)\alpha}\gamma\|x(s)\|ds.$$

Z Gronwallova lemmatu (Lemma 4.1) dostáváme

$$e^{t\alpha}\|x(t)\| \leq ce^{t_0\alpha}\|x_0\|e^{c\gamma(t-t_0)}.$$

Po opětovném přenásobení exponenciálou nakonec máme

$$\|x(t)\| \leq c\|x_0\|e^{(t-t_0)(c\gamma-\alpha)} = ce^{-\beta(t-t_0)}\|x_0\|.$$

□

konec 8. přednášky (11.4.2025)

Věta 7.5 (o linearizované stabilitě)**.** *Je dána rovnice $x' = f(x)$. Nechť $f(x_0) = 0$ a $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 a nechť $\Re\lambda < 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$, kde $A = \nabla f(x_0)$. Potom x_0 je (uniformně) asymptoticky stabilní.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti uvažujme $x_0 = 0$. Dále definujeme $g(x) = f(x) - Ax$. Potom naši rovnici přepíšeme do tvaru $x' = Ax + g(x)$.

O matici A můžeme říct, že $\|e^{tA}\| \leq ce^{-\alpha t}$. Přesněji řečeno, nechť $\lambda_0 := \max\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$. Nechť $-\alpha \in (\lambda_0, 0)$ a k tomuto α nalezneme $c > 0$ takové, že platí výše uvedená rovnost. Existenci takového c nám zaručuje Důsledek 6.8.

Dále o funkci g víme, že $g(x) = o(\|x\|)$ a $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{\|x\|} = 0$. Nechť $\gamma < \frac{\alpha}{c}$, vezmeme $\delta > 0$ dost malé, aby $\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} < \gamma$ na $B(0,\delta)$. Pak na tomto okolí platí $\|g(x)\| \leq \delta\|x\|$.

Použijeme seřezávací funkci

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, t < \frac{\delta}{2}; \\ 0, t > \delta; \\ \text{spojité prodloužení na } (\frac{\delta}{2}, \delta). \end{cases}.$$

Dále definujeme $h(x) := \eta(\|x\|)g(x)$. Podíváme se na rovnici $x' = Ax + h(x)$. Pro $\|x\| < \frac{\delta}{2}$ platí $h(x) = g(x)$, dále pro $\|x\| > \delta$ je $h(x)$ nulová a nakonec pro $\|x\| \in [\frac{\delta}{2}, \delta]$ platí $\|h(x)\| \leq \|g(x)\|$. Tato porušená rovnice již splňuje předpoklad Lemmatu 7.4. Aplikací tohoto lemmatu dostáváme odhad na řešení této porušené rovnice.

$$\|x(t)\| \leq c\|x(t_0)\|e^{-\beta(t-t_0)}, \beta > 0.$$

Vezmeme $x(t_0)$ dost malé, potom díky předchozímu odhadu funkce x zůstane v $B(0, \frac{\delta}{2})$ pro všechna $t \geq 0$, tedy $h(x) = g(x)$, z čehož nakonec dostáváme, že x řeší i původní rovnici $x' = Ax + g(x)$. Tím jsme dokázali, že řešení začínající blízko nuly zkolabují v nekonečnu, což je právě definice asymptotické stability. □

Věta 7.6 (o linearizované nestabilitě)**.** *Je dána rovnice $x' = f(x)$. Nechť $f(x_0) = 0$ a $f(x)$ je C^1 na okolí x_0 a nechť existuje vlastní číslo $\lambda \in \sigma(A)$ takové, že $\Re\lambda > 0$, kde $A = \nabla f(x_0)$. Potom x_0 není stabilní.*

Důkaz. Idea důkazu: nejdříve si matici A převedeme do Jordanova kanonického tvaru, poté si ukážeme, že řešení “se drží” nestabilního směru. Nakonec důkaz formálně dokončíme pomocí věty o opuštění kompaktu (Věta 3.5).

Bez újmy na obecnosti uvažujme $x_0 = 0$. Nechť tedy $A = VJV^{-1}$ je převod matice A do Jordanova tvaru. Přenásobíme matici J zprava maticí $H = \mathrm{diag}(\eta, \eta^2, \ldots, \eta^n)$ a zleva maticí $H^{-1} = \mathrm{diag}(\eta^{-1}, \ldots, \eta^{-1})$. Dostáváme matici v Jordanově kanonickém tvaru, kde místo jedniček máme η. Potom $A = (VH)\tilde{J}(VH)^{-1}$ Můžeme psát

$$x' = Ax + g(x) = (VH)\tilde{J}(VH)^{-1}x + g(x).$$

Nechť $y := (VH)^{-1}x$, potom

$$y' = (VH)^{-1}x' = \tilde{J}y + (VH)^{-1}g(VHy).$$

Označme $\tilde{g}(y) := g(VHy)$. Dostali jsme tedy rovnici $y' = \tilde{J}y + \tilde{g}(y)$. Platí $\tilde{g}(y) = o(\|y\|)$ (plyne z toho, že $g(x) = o(\|x\|)$).

Mějme vektor $y = (y_1, \dots, y_n)$. Nechť $z = (z_1, \dots, z_j)$ jsou nestabilní směry a $w = (w_{j+1}, \dots, w_n)$ jsou stabilní a centrální směry. Potom nechť $\varphi(t) := \sum_{i=1}^{j} |z_i|^2$ a $\psi(t) := \sum_{i=j+1}^{n} |w_i|^2$. Můžeme psát $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{j} z_i \bar{z}_i$ a analogicky pro w_i. Implicitně zde předpokládáme závislost na čase. Dále definujeme $Z := \{(z, w) \in \mathbb{R}^n : \varphi(t) \geq \psi(t)\}$.

Nechť $\lambda_0 := \min\{\Re\lambda; \lambda \in \sigma(A), \Re\lambda > 0\}$. Vezmeme $\eta = \frac{\lambda_0}{6}$ a $\delta > 0$ takové, aby $\|\tilde{g}(y)\| \leq \eta\|y\|$ pro všechna $y \in B_\delta$. Dále definujeme $K := Z \cap \overline{B_\delta}$.

Uvažujme řešení $y(t) = (z(t), w(t))$, pro které budeme odhadovat. Ukážeme, že platí, že pokud $\varphi(t_1) - \psi(t_1) > 0$, potom $\varphi(t) - \psi(t) > 0$ pro všechna $t > t_1$, dokud jsme v B_δ. Ukážeme, že $(\varphi(t) - \psi(t))' > 0$.

Můžeme psát

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{j} z_i \bar{z}_i = \sum_{i=1}^{j} z_i'(t)\bar{z}_i(t) + z_i(t)\bar{z}_i'(t) = \sum_{i=1}^{j} 2\Re z_i z_i' \\
&= 2\Re\left(\sum_{i=1}^{j} z_i \lambda_i z_i + \left(\sum_{i=1}^{j} z_i \mu z_{i+1}\right) + \sum_{i=1}^{j} z_i \tilde{g}_i(z, w)\right).
\end{aligned}$$

Z toho máme, že

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \sum_{i=1}^{j} 2\Re\bar{\lambda}_i |z_i|^2 + 2\Re \sum_{i=1}^{j} z_i \mu \bar{z}_{i+1} + 2\Re \sum_{i=1}^{j} z_i \overline{\tilde{g}_i(z, w)} \\
&\geq 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{j} |z_i|^2 - \left| 2\Re \sum_{i=1}^{j} z_i \mu \bar{z}_{i+1} \right| - \left| 2\Re \sum_{i=1}^{j} z_i \overline{\tilde{g}_i(z, w)} \right|.
\end{aligned}$$

Dále platí (AG-nerovnost)

$$\left| \sum_{i=1}^{j} \eta z_i \bar{z}_{i+1} \right| \leq \sum_{j=1}^{i} \eta \frac{1}{2}(|z_i|^2 + |z_{i+1}|^2) \leq \eta \frac{1}{2}(\varphi(t) + \varphi(t)) = \eta\varphi(t)$$

a také

$$\left| \sum_{i=1}^{j} z_i \overline{\tilde{g}_i(z, w)} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j} (|z_i|^2 \eta + \frac{1}{\eta} |\tilde{g}_i(z, w)|^2) = \frac{1}{2}\eta\varphi(t) + \eta\varphi(t),$$

neboť $\sum |g_i|^2 = |g(y)|^2 < \eta^2 |y|^2 \leq 2\eta^2 |z|^2 = 2\eta^2 \varphi(t)$.

Celkově tedy máme, že $\varphi'(t) \geq (2\lambda_0 - 2\eta - 3\eta)\varphi(t) \geq 7\eta\varphi(t)$, jelikož $\lambda_0 > 3\eta$. Obdobně budeme postupovat s odhadem pro $\psi'(t)$. Můžeme psát

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= 2\Re \sum_{i=j+1}^{n} w_i \bar{w}_i' = 2\Re \sum_{i=j+1}^{n} w_i \overline{(\lambda_i w_i + \eta w_{i+1} + \tilde{g}_i(z,w))} \\
&= 2\Re \left(\lambda_i \sum_{i=j+1}^{n} |w_i|^2 + \sum_{i=j+1}^{n} w_i \eta \bar{w}_{i+1} + \sum_{i=j+1}^{n} w_i \overline{\tilde{g}_i(z,w)} \right) \\
&\leq 2\eta \frac{1}{2} \left(\sum_{i=j+1}^{n} \left(|w_i|^2 + |w_{i+1}|^2 \right) + \sum_{i=j+1}^{n} \left(|w_i|^2 \eta + \frac{1}{\eta} |\bar{g}_i^2(z,w)| \right) \right) \\
&\leq 2\eta\psi(t) + \eta\psi(t) + 2\eta\varphi(t) \leq 5\eta\varphi(t),
\end{aligned}$$

přičemž v poslední nerovnosti jsme využili faktu, že $\psi(t) < \varphi(t)$. Z těchto dvou právě dokázaných nerovností již plyne $\varphi'(t) - \psi'(t) \geq 2\eta\varphi(t) > 0$.

Z nerovnosti pro $\varphi'(t)$ platí $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \geq 7\eta$. Zintegrováním dostaneme následující nerovnost pro funkci φ:

$$\varphi(t) \geq e^{7\eta(t-t_0)}\varphi(t_0).$$

Nechť $y(0) = (z(0), w(0)) \in K$. Potom existuje $T > 0$ takové, že platí nerovnost $e^{7\eta(T-t_0)}\|\varphi_z(t_0)\|^2 > \delta^2$. Uvažujme kompakt $C := K \times [t_0, T+\varepsilon]$. Naše řešení y tento kompakt opustí. Buď $t_1 = \inf\{t \geq t_0; (y(t), t) \in C\}$.

Pak $t_1 < T + \varepsilon$. Skutečně, nechť $t_1 \geq T + \varepsilon$, potom $\|y(t_1)\|^2 \geq \varphi_z(t_1) \geq e^{7\eta(t_1-t_0)}\varphi_z(t_0) > \delta^2$. To je spor s předpokladem, že t_1 je infimum. Jistě platí $y(t_0) \in \delta K$. Funkce $\varphi - \psi$ je rostoucí, tedy $\varphi(t_0) - \psi(t_0) \geq \varphi(0) - \psi(0)$. Z toho již plyne, že $|y(t_0)| = \delta$. Dostali jsme, že řešení y opustí otevřenou kouli o poloměru δ, což je přesně to, co jsme chtěli dokázat v této větě. □

konec 9. přednášky (25.4.2025)

Na závěr této kapitoly si uvedeme jednu větu bez důkazu, která se hodí k vyšetřování stability na okolí stacionárních bodů.

Věta 7.7 (Hartman-Grobman)**.** *Uvažujme autonomní rovnici $x' = f(x)$. Nechť x_0 je hyperbolický stacionární bod této rovnice (tedy $\sigma(\nabla f(x_0)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$). Pak existuje okolí U bodu x_0 a okolí V bodu $0 \in \mathbb{R}^n$ a homeomorfismus $\phi : U \to V$ při kterém se řešení rovnice $x' = f(x)$ zobrazí na řešení rovnice $x' = Ax$, kde $A = \nabla f(x_0)$.*

8 První integrál

V celé této kapitole budeme uvažovat autonomní rovnici

$$x' = f(x) \tag{7}$$

pro f spojitou a lokálně lipschitzovskou.

Definice 8.1. Funkci $U : \Omega \to \mathbb{R}$ nazveme *prvním integrálem* rovnice (7), jestliže $U \in C^1(\Omega)$ a je nekonstantní a zároveň $t \mapsto U(x(t))$ je konstantní pro každé řešení x dané rovnice v Ω.

Například, máme-li rovnici $x'' + kx = 0$ (lze pomocí ní popsat kmitání pružiny s hybností $k > 0$), funkce $V(x', x) = \frac{1}{2}x'^2 + \frac{k}{2}x^2$ je jejím prvním integrálem, neboť tato funkce je zřejmě hladká a nekonstantní a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x'(t), x(t)) = x' \cdot x'' + kxx' = x'(x'' + kx) = 0.$$

Věta 8.2 (Charakterizace prvních integrálů pomocí orbitálních derivací)**.** *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $U : \Omega \to \mathbb{R}$ je třídy C^1. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Pro všechna řešení x rovnice (7) *je $t \mapsto U(x(t))$ konstantní;*

(ii) $\nabla U(\xi)f(\xi) = 0$ pro všechna $\xi \in \Omega$.

Důkaz. (ii) $\implies$ (i): Přímým výpočtem dostaneme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(x,t) = \nabla U(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla U(x(t))f(x(t)) = 0$.

(i) $\implies$ (ii): Mějme bod $\xi \in \Omega$. Dle Peanovy věty (Věta 1.6) bodem ξ prochází nějaké řešení x takové, že $x(0) = \xi$. Z toho již dostáváme, že $\nabla U(\xi) \cdot f(\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(x(t))\big|_{t=0} = 0$. $\square$

Definice 8.3. První integrály $U_1, \ldots, U_k$ jsou *lineárně nezávislé* v bodě x_0, jestliže matice $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\ldots,k}^{j=1,\ldots,n}$ má v tomto bodě hodnost k.

Je dobré si uvědomit, že prvních integrálů, které jsou lineárně nezávislé v bodě x_0, může být nejvýše $n-1$, což plyne z Věty 8.2, a to tak, že pro každý první integrál platí $\nabla U_i(x_0) \perp f(x_0) \neq 0$ a v prostoru dimenze n existuje přesně $n-1$ lineárně nezávislých vektorů kolmých na daný vektor.

Metodu prvních integrálů budeme používat k redukci počtu rovnic v soustavách ODR. Skutečně, mějme soustavu

$$\begin{cases} x' = f(x, y); \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

a nechť $V(x, y) = K$ je její první integrál. Ve většině případů z toho můžeme vyjádřit x jakožto funkci $x = h(y, K)$, což po dosazení do druhé rovnice nám dává

$$y' = g(h(y, K), y),$$

čímž jsme zredukovali počet rovnic na jednu. K přesné formulaci právě popsaného postupu použijeme následující větu.

Věta 8.4 (O snížení řádu)**.** *Nechť* $U_1, \dots, U_k$ *jsou první integrály* (7) *lineárně nezávislé v bodě* x_0*. Potom řešení procházející bodem* x_0 *lze lokálně popsat pomocí* $(n-k)$ *rovnic* $z' = g(z)$, $z \in \mathbb{R}^{n-k}$, $g : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}$.

Důkaz. Označme $K_i = U_i(x_0)$ a $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : U_i(x) = K_i \text{ pro } i = 1, \dots, k\}$. Víme, že $\nabla U_1(x_0), \dots \nabla U_k(x_0)$ jsou lineárně nezávislé vektory, to znamená, že matice $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\dots,k}^{j=1,\dots,n}$ má k lineárně nezávislých sloupců. Bez újmy na obecnosti nechť toto jsou sloupce $1, \dots, k$. Označme $x = (x_1, \dots, x_k, y)$, kde $x \in \mathbb{R}^n$ a pro $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ platí $y = (x_{k+1}, \dots, x_n)$.

Jelikož matice $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\dots,k}^{j=1,\dots,k}$ je regulární, díky větě o implicitních funkcích existují konstanty $\delta, \Delta > 0$ takové, že pro každé y z δ-okolí bodu x_0 existuje právě jedna k-tice $(x_1, \dots, x_k)$ z Δ-okolí x_0 (uvažujeme restrikci na prvních k souřadnic) taková, že platí $U_i(x_1, \dots, x_k, y) = K_i$ pro všechna $i = 1, \dots, k$. Pokud příslušnou k-tici označíme jako $(\varphi_1(y), \dots, \varphi_k(y))$, potom funkce φ je třídy C^1.

Z výše uvedeného dostáváme, že pokud $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ je řešení rovnice (7), potom pro $i \geq k+1$ platí

$$x_i'(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) = f_i(\varphi_1(y(t)), \dots, \varphi_k(y(t)), y(t)) =: \tilde{f}_i(y(t)).$$

Tímto jsme získali požadovanou soustavu rovnic

$$(x_{k+1}', \dots, x_n') = y' = \tilde{f}(y(t)), \tilde{f} : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}.$$

□

Věta 8.5 (Existence lineárně nezávislých prvních integrálů)**.** *Nechť* $f \in C^1(\Omega)$, $f(x_0) \neq 0$*. Potom má rovnice* $x' = f(x)$ *na okolí* x_0 $(n-1)$ *prvních integrálů, které jsou lineárně nezávislé v bodě* x_0*.*

Právě vybudovanou teorii můžeme využít k aplikaci takzvané metody charakteristik, což je matematický aparát, který nám umožňuje přecházet mezi autonomními ODR a jistou třídou lineárních parciálních diferenciálních rovnic (podrobnosti viz přednáška Úvod do parciálních diferenciálních rovnic[1]).

konec 10. přednášky (2.5.2025)

[1] pokud ji zrovna učí někdo příčetný

9 Ljapunovské funkce a stabilita

V této kapitule se pokusíme vybudovat pokročilejší teorii, která nám umožní určit stabilitu u většího počtu možných obyčejných diferenciálních rovnic. Budeme uvažovat evoluční rovnici (1)

$$x' = f(x,t),$$

kde $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Bez újmy na obecnosti dále nechť $f(0,t) = 0$ pro všechna $t \in I$ a $I = [0, +\infty)$, neboli jinými slovy 0 je stacionární řešení této rovnice. Budeme zkoumat stabilitu tohoto nulového řešení.

Definice 9.1. Funkci $\omega : \Omega \to [0, +\infty)$ nazveme *pozitivně definitní*, pokud je spojitá, $\omega(0) = 0$ a $\omega(x) > 0$ pro všechna $x \in \Omega \setminus \{0\}$.

Pozitivně definitní funkce jsou například $f(x,y) = x^2 + y^2$ nebo $g(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^{2k_i}$ pro $k_i \in \mathbb{N}$ a $a_i > 0$.

Definice 9.2. Funkci $V(x,t) : \Omega \times I \to [0, +\infty)$ nazveme *ljapunovskou* pro (1) v Ω, jestliže

(i) V je spojitá a $V(0,t) = 0$ pro všechna $t \in I$;

(ii) $t \mapsto V(x(t),t)$ je nerostoucí pro každé řešení x rovnice (1);

(iii) existuje pozitivně definitní funkce ω v Ω taková, že $V(x,t) \geq \omega(x)$ pro všechna $x \in \Omega$ a $t \in I$.

V některých případech první integrál může být kandidátem na ljapunovskou funkci, ale ne vždy to tak vyjde. Dále, je-li V třídy C^1, je podmínka (ii) ekvivalentní nekladnosti orbitální derivace

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) + \nabla_x V(x,t) \cdot f(x,t) \leq 0$$

pro všechna $(x,t) \in \Omega \times I$. Důkaz je analogický důkazu Věty 8.2.

Věta 9.3 (Ljapunovská funkce a stabilita)**.** *Nechť* (1) *má ljapunovskou funkci pro bod* 0*, pak nulové řešení je stabilní.*

Důkaz. Volme $\varepsilon > 0$ a chceme najít $\delta > 0$ tak, aby $|x_0| < \delta$ implikovalo $|x(t)| < \varepsilon$ v každém čase $t \geq 0$. Bez újmy na obecnosti nechť $\overline{U(0,\varepsilon)} \subset \Omega$. Dále budeme uvažovat ljapunovskou funkci V a příslušnou pozitivně definitní funkci ω (takovou, že $V(x,t) \geq \omega(x)$ pro každé $x \in \Omega$).

Na sféře $S_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \varepsilon\}$ je funkce ω kladná a spojitá a S_ε je kompaktní, tedy ω nabývá na S_ε svého minima $\alpha > 0$ v nějakém bodě $\xi \in S_\varepsilon$.

Máme, že $\omega(x) \geq \alpha$ pro všechna $x \in S_\varepsilon$ a chceme, aby $V(x_0, t_0) < \alpha$. Pro dané t_0 je $V(\cdot, t_0)$ spojitá a $V(0, t_0) = 0$. Díky tomu existuje $\delta > 0, \delta < \varepsilon$ takové, že $V(x, t_0) < \alpha$ na $U(0, \delta)$.

Nechť nyní $x_0 \in U(0,\delta)$, tedy $V(x_0,t_0) < \alpha$, a tedy $V(x(t),t) \leq V(x_0,t_0) < \alpha$ pro všechna $t \geq t_0$. Pro spor předpokládejme, že existuje čas t_1 takový, že $|x(t_1)| \geq \varepsilon$, ale pak by díky spojitosti musel existovat čas t_2 takový, že $|x(t_2)| = \varepsilon$, tedy $x(t_2) \in S_\varepsilon$, ale $V(x(t_2, t_2)) \geq \omega(x(t_2)) \geq \alpha$, což je spor s volbou vhodného δ. $\square$

Věta 9.4 (Ljapunovská funkce a asymptotická stabilita)**.** *Nechť rovnice* (1) *má v* $\Omega\times I$ *ljapunovskou funkci* V*. Nechť navíc existují v* Ω *pozitivně definitní funkce* λ *a* η *takové, že*

(i) $V(x,t) \le \lambda(x)$ *pro každé* $(x,t) \in \Omega \times I$*,*

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t),t) \le -\eta(x(t))$*, kdykoli* x *řeší* (1) *v* Ω*.*

Potom 0 *je asymptoticky stabilní v* I*.*

K důkazu této věty budeme potřebovat následující lemma o zachovávání konvergence při aplikaci pozitivně definitní funkce (poznamenejme si, že opačná implikace platí také díky větě o limitě složené funkce).

Lemma 9.5. *Nechť* ω *je pozitivně definitní v* Ω *a* $\varepsilon > 0$ *je takové, že* $\overline{U(0,\varepsilon)} \subset \Omega$*. Buď* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost v* $\overline{U(0,\varepsilon)}$ *splňující* $\omega(x_n) \to 0$*. Potom* $x_n \to 0$*.*

Důkaz. Volme $\tilde{\varepsilon} > 0$, $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ libovolně. Potom $\overline{U(0,\varepsilon)} \setminus U(0,\tilde{\varepsilon})$ je kompaktní, ω je spojitá, tedy zde nabývá svého minima $\omega(x_0) > 0$. Potom existuje n_0 takové, že pro všechna $n \ge n_0$ máme $\omega(x_n) < \omega(x_0)$, a tedy $x_n \in U(0,\tilde{\varepsilon})$. □

Důkaz Věty 9.4. Stabilitu jsme již dokázali ve Větě 9.3, stačí tedy dokázat, že počátek je lokální atraktor. Mějme $\varepsilon > 0$, k tomu ze stability nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro $|x_0| < \delta$ máme $|x(t)| < \varepsilon$ v každém čase $t \ge 0$.

Dále uvažujme x_0 takové, že $|x_0| < \delta$. Funkce $t \mapsto V(x(t),t)$ je neklesající a nezáporná, tedy existuje $\lim_{t\to+\infty} V(x(t),t) = a \ge 0$. Dále platí

$$\int_{t_0}^{t} \eta(x(s))ds \le -\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} V(x(s),s)ds = V(x(t_0),t_0) - V(x(t),t),$$

pro t jdoucí do nekonečna dostáváme $V(x(t_0),t_0) - V(x(t),t) \to V(x(t_0),t_0) - a$, a tedy

$$\int_{t_0}^{\infty} \eta(x(s))ds \le V(x(t_0),t_0).$$

Jmenovitě tento integrál je konečný, a tedy existuje posloupnost $t_n \nearrow +\infty$ taková, že $\eta(x(t_n)) \to 0$ (pozor, $\eta(x(t))$ samotná nemusí konvergovat k nule). Z právě dokázaného lemmatu dostáváme, že $x(t_n) \to 0$, z čehož díky spojitosti a pozitivní definitnosti funkce λ v 0 dostáváme $\lambda(x(t_n)) \to 0$.

Dále můžeme psát $0 \le V(x(t_n),t_n) \le \lambda(x(t_n)) \to 0$, a tedy $V(x(t_n),t_n) \to 0$. Díky větě o limitě podposloupnosti dostáváme, že $V(x(t),t) \to 0 = a$ a jelikož $0 \le \omega(x(t)) \le V(t,x(t)) \to 0$, musí nutně platit $\omega(x(t)) \to 0$.

Jelikož posloupnost t_n byla volena libovolně, máme díky předchozímu lemmatu $x(t_n) \to 0$ pro libovolnou $t_n \nearrow +\infty$, a tedy dle Heineovy věty $x(t) \to 0$, což jsme chtěli dokázat. □

Na závěr si uvedeme větu, která nám poskytuje několik možných charakterizací pro asymptotickou stabilitu nulového řešení.

Věta 9.6 (Ekvivalentní podmínky pro rovnici (6))**.** *Je dána rovnice* $x' = Ax$*, kde* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) 0 *je asymptoticky stabilní v* $[0, +\infty)]$*;*

(ii) $\Re\lambda < 0$ *pro všechna* $\lambda \in \sigma(A)$*, neboli* A *je hurwitzovská;*

(iii) existují $\alpha, c > 0$ *taková, že* $\|e^{tA}\| \leq ce^{-\alpha t}$ *pro všechna* $t \geq 0$*;*

(iv) existuje symetrická pozitivně definitní matice $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *taková, že*

$$A^T B + BA = -I.$$

Důkaz. Ekvivalence mezi body (i), (ii) a (iii) byla již dokázána ve Větách 7.3, 7.2 (iv) a větách o tvaru maticové exponenciály.

Dokážeme, že z (iii) plyne (iv). Definujeme $B := \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} dt$. Platí $e^{tA^T} = (e^{tA})^T, (A^T)^k = (A^k)^T$, proto

$$e^{tA^T} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^T)^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\right)^T.$$

Dále pro $\alpha > 0$ z vlastnosti (iii) můžeme psát $\|e^{tA^T}\| = \|e^{tA}\| \leq ce^{-t\alpha}$, proto

$$\|e^{tA^T} e^{tA}\| \leq ce^{-\alpha t} \cdot ce^{-\alpha t} = c^2 e^{-2\alpha t},$$

tedy integrál v definici matice B je dobře definovaný.

Ukážeme, že B je symetrická a pozitivně definitní. Platí

$$\begin{aligned} B^T = \left(\int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} dt\right)^T &= \int_0^\infty (e^{tA^T} e^{tA})^T dt = \\ = \int_0^\infty (e^{tA})^T (e^{tA^T})^T dt &= \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} dt = B. \end{aligned}$$

Dále B splňuje

$$\begin{aligned} \langle Bx, x\rangle = \left\langle \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} dt x, x\right\rangle &= \int_0^\infty \left\langle e^{tA^T} e^{tA} x, x\right\rangle dt \\ = \int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}x\rangle dt &= \int_0^\infty \|e^{tA}x\|^2 dt > 0, \end{aligned}$$

kde kladnost tohoto výrazu plyne z toho, že $\|e^{tA}x\|$ je nenulové pro $x \neq 0$.

Zbývá dokázat, že B splňuje rovnost $A^T B + BA = -I$. Skutečně, můžeme psát

$$\begin{aligned} A^T B = A^T \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} dt = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA^T} e^{tA} dt &\overset{\text{per partes}}{=} \left[e^{tA^T} e^{tA}\right]_0^\infty \\ - \int_0^\infty e^{tA^T} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA} dt = 0 - I - \int_0^\infty e^{tA^T} e^{tA} dt A &= -I - BA. \end{aligned}$$

Pro důkaz implikace (iv) $\implies$ (i), ukážeme, že $V(x,t) := \langle Bx, x\rangle$ je ljapunovská funkce splňující podmínku z Věty 9.4. Jelikož chceme, aby platilo

$\omega(x) \leq V(x,t) \leq \lambda(x)$, stačí volit $\lambda(x) = \omega(x) = \langle Bx, x\rangle$. Nalezneme vhodnou funkci η tak, aby $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x(t),t) \leq -\eta(x)$. Díky vlastnostem skalárního součinu platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Bx(t), x(t)\rangle &= \langle Bx'(t), x(t)\rangle + \langle Bx(t), x'(t)\rangle = \\ &= \langle BAx(t), x(t)\rangle + \langle Bx(t), Ax(t)\rangle = \\ &= \left\langle (BA + A^T B)x(t), x(t)\right\rangle = -\|x(t)\|^2.\end{aligned}$$

Stačí tedy volit $\eta(x) = \|x\|^2$, a tedy dle výše zmíněné Věty 9.4 je naše úloha asymptoticky stabilní. $\square$

Poslední rovnosti se běžně říká *Ljapunovova rovnice*. Dále z bodu (iv) plyne, že $V(x) = x \cdot Bx$ je ljapunovskou funkcí rovnice $x' = Ax$, pomocí níž můžeme sepsat alternativní důkaz věty o linearizované stabilitě (Věta 7.5).

konec 11. přednášky (9.5.2025)

10 Floquetova teorie

V této kapitole se budeme zabývat lineární rovnicí

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{8}$$

a příslušnou homogenní rovnicí

$$x' = A(t)x \tag{9}$$

pro T-periodické funkce $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ a $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Budeme zkoumat periodicitu a stabilitu řešení této rovnice.

Pozorování 10.1. *(i) Pro každou počáteční podmínku $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jedno maximální řešení obou těchto rovnic a to je definované na celém $\mathbb{R}$.*

(ii) Buď x řešení (8) a definujeme $y(t) := x(t+T)$. Potom y je také řešení dané rovnice. Skutečně, platí

$$y'(t) = x'(t+T) = A(t+T)x(t+T) + b(t+T) = A(t)y(t) + b(t).$$

(iii) Řešení x je T-periodické právě tehdy, když $x(T) = x(0)$. Implikace $\Longrightarrow$ je triviální, pro důkaz té opačné můžeme definovat $y(t) := x(t+T)$, což je díky již dokázanému také řešení a $y(0) = x(T) = x(0)$. Z jednoznačnosti řešení se tyto dvě řešení musí rovnat, tedy máme $x(t) = y(t) = x(t+T)$ pro všechna t.

(iv) Nechť Φ je fundamentální matice (9) taková, že $\Phi(0) = I$. Potom řešení x rovnice (9) je periodické právě tehdy když $\Phi(T)x_0 = x_0$, jinými slovy, x_0 je vlastní vektor matice $\Phi(T)$ příslušný vlastnímu číslu 1.

Definice 10.2. Nechť Φ je fundamentální matice (9) taková, že $\Phi(0) = I$. Pak matici $C = \Phi(T)$ nazveme *maticí monodromie.*

Dle předchozího pozorování není těžké zpozorovat, že počet periodických řešení naší úlohy úzce souvisí s dimenzí jádra matice $C - I$, tedy násobností vlastního čísla 1 matice C.

Lemma 10.3 (Maticový logaritmus)**.** *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární. Pak existuje matice $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ splňující $e^B = A$. Tato matice B nemusí být určena jednoznačně.*

Ústřední větou celé Floquetovy teorie je následující věta, která nám umožňuje jistým způsobem charakterizovat chování fundamentální matice pro rovnici (9).

Věta 10.4 (Floquet)**.** *Existuje $Q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ T-periodická, $Q(t)$ regulární pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tak, že*

$$\Phi(t) = Q(t)e^{tB} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Zde $\Phi(t)$ je fundamentální matice úlohy (9) taková, že $\Phi(0) = I$.

Důkaz. Nechť $C = \Phi(T)$ je matice monodromie. Z Lemmatu 10.3 nalezneme komplexní matici $\tilde{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takovou, že $e^{\tilde{B}} = C$ a položíme $B = \frac{1}{T}\tilde{B}$ (tedy $e^{T\cdot B} = C$ z vlastností exponenciály).

Definujeme $Q(t) := \Phi(t)e^{-tB}$. Tato matice je regulární, spojitá a splňuje $\Phi(t) = Q(t)e^{tB}$. Dokážeme, že je T-periodická. K tomu budeme potřebovat funkci $\Psi(t) := \Phi(t+T)$. Platí

$$\Psi'(t) = \Phi'(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Phi(t),$$

tedy Ψ je taky fundamentální matice a platí $\Psi(0) = \Phi(t) = C$. Zároveň také $\Phi(t)C$ je fundamentální maticí (9) a $\Phi(0)C = C$. Z jednoznačnosti dostáváme, že $\Psi(t) = \Phi(t)C$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Nakonec

$$Q(t+T) = \Phi(t+T)e^{-(t+T)B} = \Psi(t)e^{-TB}e^{-tB} = \Phi(t)CC^{-1}e^{-tB} = Q(t),$$

čímž je důkaz ukončen. □

Floquetova transformace $y(t) = Q^{-1}(t)x(t)$ převádí řešení (9) na řešení úlohy $y' = By$, což je rovnice s konstantními koeficienty. Platí

$$y(t) = Q^{-1}(t)\Phi(t)x_0 = Q^{-1}(t)Q(t)e^{tB}x_0 = e^{tB}x_0.$$

Položíme-li $t = kT + s$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a $s \in [0,T)$, pak

$$\begin{aligned} x(t) = \Phi(t)x_0 = Q(t)e^{tB}x_0 = Q(s)e^{(kT+s)B}x_0 = \\ = Q(s)e^{sB}(e^{TB})^k x_0 = \Phi(s)C^k x_0. \end{aligned}$$

Matici C^k můžeme relativně snadno spočítat pomocí převodu na Jordanův kanonický tvar, což v praxi často výrazně zjednodušuje výpočty.

Důsledek 10.5. *Pokud pro spektrum matice monodromie platí $\sigma(C) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, pak máme asymptotickou stabilitu.*

Věta 10.6 (Existence periodických řešení)**.** *Nechť matice $A(t)$ je spojitá a T-periodická. Potom je ekvivalentní:*

(i) *rovnice* (8) *(nehomogenní) má právě jedno T-periodické řešení pro každou $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ T-periodickou;*

(ii) *rovnice* (9) *(homogenní) má pouze triviální T-periodické řešení;*

(iii) $1 \notin \sigma(C)$.

Důkaz. (ii) $\iff$ (iii): x je netriviální T-periodické řešení právě tehdy, když $x(T) = x(0)$, coz nastane právě tehdy, když $Cx_0 = x_0$, tedy 1 je vlastní číslo matice C.

(i) $\implies$ (ii): Předpokládejme, že x je T-periodické řešení (8) a pro spor předpokládejme, že y je netriviální T-periodické řešení homogenní rovnice, tedy $x+y$ je T-periodické řešení (8), ale $x+y \neq x$, což je spor s jednoznačností řešení nehomogenní úlohy.

(iii) $\implies$ (i): Řešení nehomogenní úlohy můžeme explicitně zapsat ve tvaru $x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s)ds$. Dokážeme, že toto je jediné T-periodické řešení úlohy (8). Můžeme psát $x(T) = Cx_0 + y$, kde $y = \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)b(s)ds$, tedy $x(T) = x_0$ právě tehdy, když $-y = (C - I)x_0$. Dle předpokladu v (iii) je matice $C - I$ regulární, tedy existuje právě jedno x_0 splňující danou podmínku, proto T-periodické řešení (8) je určeno jednoznačně. □

Důsledek 10.7 (Stabilita pro periodické lineární rovnice)**.** *Nulové řešení* (9) *je (asymptoticky) stabilní, právě když nulové řešení $y' = By$ je (asymptoticky) stabilní.*

Důkaz. Z Floquetovy věty (Věta 10.4) a poznámky o Floquetově transformaci víme, že $x(t) = Q(t)e^{tB}x_0 = Q(t)y(t)$. Potom

$$\|x(t)\| \leq \|Q(t)\|\|y(t)\| \leq \max_{t\in[0,T]} \|Q(t)\|\|y(t)\| = K\|y(t)\|$$

a obdobně

$$\|y(t)\| \leq \|Q^{-1}(t)\|\|x(t)\| \leq \tilde{K}\|x(t)\|.$$

□

konec 12. přednášky (16.5.2025)