Obyčejné diferenciální rovnice (NMMA336)

Petr Velička *
přednášející: doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D. †

LS 2024/25

*petrvel@matfyz.cz
†barta@karlin.mff.cuni.cz

1 Lokální existence řešení

Diferenciální rovnice nás doprovází v každé oblasti lidského života. Neexistuje obecná teorie, která by nám umožnila vyřešit všechny diferenciální rovnice najednou. Musíme se proto omezit jen na část rovnic.

Úmluva 1.1. V této přednášce budeme studovat systém rovnic

$$x' = f(x,t) \tag{1}$$

za trvalého předpokladu $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá.

Definice 1.2. Buď I otevřený interval. Funkci $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ nazveme *řešením* diferenciální rovnice (1) v Ω, jestliže pro všechna $t \in I$ platí

(i) $(x(t), t) \in \Omega$,

(ii) existuje vlastní $x'(t)$,

(iii) $x'(t) = f(x(t), t)$.

Takto definované řešení je nutně spojité a má spojitou derivaci (je třídy C^1), tzv. klasické řešení. Dále si poznamenejme, že platí tzv. princip nalepování: Pokud máme $x(t)$ řešení na (a, t_0) a na (t_0, b), pak už je řešením na celém (a, b). To plyne z toho, že $x'_-(t_0) = \lim_{t\to t_0^-} x'(t) = \lim_{t\to t_0^-} f(x(t), t) = f(x(t_0), t_0)$, přičemž tatáž rovnost platí i pro derivaci zprava.

Lemma 1.3. *Nechť I je otevřený interval, $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ spojitá splňující $(x(t), t) \in \Omega$ pro každé $t \in I$ a nechť $t_0 \in I$. Potom je ekvivalentní*

(i) x je řešení (1) splňující $x(t_0) = x_0$,

(ii) pro každé $t \in I$ platí $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds$.

Důkaz. Víme, že platí $x'(s) = f(x(s), s)$ pro všechna $s \in I$, což je spojitá funkce, kterou můžeme zintegrovat na $[t_0, t]$. Potom z Newtonova-Leibnizova vzorce máme $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds$. Tedy $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds$.

Pro důkaz opačné strany si uvědomíme, ze pro každé $t \in I$ je pravá strana diferencovatelná, tedy $x'(t) = f(x(t), t)$ a po dosazení $t = t_0$ dostáváme $x(t_0) = x_0$. $\square$

Teď si zadefinujeme několik pojmů, které charakterizují množiny funkcí, které se chovají jistým způsobem podobně nebo stejně.

Definice 1.4. Řekneme, že funkce množiny $M \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ jsou

1. *stejně spojité*, jestliže pro každé $x \in K$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ pro všechna $y \in (x - \delta, x + \delta)$ a všechny $f \in M$.

2. *stejně omezené*, jestliže existuje $C > 0$ takové, že $\|f\| \leq C$ pro všechna $f \in M$.

Věta 1.5 (Arzela-Ascoli)**.** *Nechť funkce $x_n(t)$ jsou stejně omezené a stejně spojité na $[0,T]$. Potom z nich lze vybrat stejnoměrně konvergující posloupnost. (bez důkazu)*

Následující věta nám říká, že na nějakém okolí libovolného bodu existuje řešení zkoumané diferenciální rovnice.

Věta 1.6 (Peano)**.** *Nechť $(x_0, t_0) \in \Omega$. Pak existuje $\delta > 0$ a funkce $x(t) : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$, která je řešením (1) a splňuje $x(t_0) = x_0$.*

K důkazu této věty budeme potřebovat pomocné lemma:

Lemma 1.7. *Pokud $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ a f je omezená na Ω, pak pro každé $T > 0$ existuje řešení (1) na $(t_0 - T, t_0 + T)$ splňující $x(t_0) = x_0$.*

Důkaz. Řešme "porušenou" úlohu P_λ: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s-\lambda), s)ds$ pro $t > t_0$ a $x(t) = x_0$ pro $t \in [t_0 - \lambda, t_0]$. Na $I_1 := (t_0, t_0 + \lambda]$ definujeme $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \lambda, s)ds$. Na $I_2 := (t_0 + \lambda, t_0 + 2\lambda]$ definujeme $x(t)$ obdobně a indukcí pokračujeme dokud $t_0 + k\lambda$ nebude větší než T. Tímto je "porušená" úloha vyřešena na $[t_0 - \lambda, t_0 + T]$.

Položme $\lambda = \frac{1}{n}$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Pišme dále jen x_n namísto $x_{1/n}$, tedy řešení úloh $P_{\frac{1}{n}}$ tvoří posloupnost funkcí. Ukážeme, že jsou stejně spojité a stejně omezené. Stejná omezenost plyne z toho, že $\|x_n(t)\| = \|x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s)ds\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s)\|ds$. Ale funkce f je omezená, tedy máme $\|x_n(t)\| \leq \|x_0\| + (T - t_0) \cdot K$, kde K je příslušná konstanta omezenosti f. Stejnou spojitost máme z odhadu $\|x_n(t) - x_n(r)\| = \| \int_r^t f(x(s - \frac{1}{n}), s)ds\| \leq |t - r| \cdot K$. V poslední nerovnosti jsme odhadli integrál součinem délky intervalu a konstantou omezenosti funkce f. Stačí položit $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, potom $\|x_n(t) - x_r(t)\| < \delta K = \varepsilon$.

Tedy dle Věty 1.5 můžeme z posloupnosti x_n vybrat stejnoměrně konvergentní podposloupnost x_{n_k}. Zbývá dokázat, že její limita řeší naši rovnici.

konec 1. přednášky (21.2.2025)

Zřejmě pro $k \to \infty$ platí $x_{n_k} \to x(t)$ a pokud $\int_{t_0}^t f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n}), s)ds$ konverguje k $\int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s)ds$, máme hotovo. Tato vlastnost plyne z toho, že $\| \int_{t_0}^t f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s), s)ds\| \leq \int_{t_0}^t \|f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s - \frac{1}{n_k}), s)\| + \|f(x(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s), s\|ds$.

Jelikož f je spojitá, musí být stejnoměrně spojitá na kompaktní množině $[t_0, t_0 + T] \times \overline{B(0, r) \cap \Omega}$, jinými slovy platí, že pro $\varepsilon > 0$ existuje δ takové, že pro každé dva body x, y takové, že $\|x - y\| < \delta$ máme, že $f(x, s) - f(y, \hat{(}s))$.

Ze stejnoměrné konvergence x_{n_k} máme, že pro $\delta > 0$ existuje k_0 takové, že pro všechna $k \geq k_0$ platí $\|x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}) - x(s - \frac{1}{n_k})\| < \delta$.

Jelikož x je spojitá, na kompaktním intervalu $[t_0, t_0 + T]$ je také stejnoměrně spojitá. Potom pro $\delta > 0$ existuje k_1 takové, že pro všechna $k \geq k_1$ platí $\|x(s - \frac{1}{n_k} - x(s)\| < \delta$.

Potom pro všechna $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ platí, že náš integrál je menší nebo roven $\int_{t_0}^{t} \varepsilon + \varepsilon ds \leq T \cdot 2\varepsilon$, tedy jsme opravdu nalezli požadované řešení.

Existence řešení na $[t_0 - T, t_0]$ se ukáže podobně. $\square$

Důkaz Věty 1.6. Uvažujme dvě koule kolem bodu (x_0, t_0) takové, že $K_1 \subset K_2 \subset \Omega$. Definujeme $\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) \text{ v } K_1, \\ \text{spojitě v } K_2 \setminus K_1 \\ 0, (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus K_2 \end{cases}$.

Z Lemmatu 1.7 máme, že rovnice $x' = \widetilde{f(x,t)}$ má řešení x splňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$. Nazveme toto řešení $\tilde{x}$. Potom ze spojitosti $\tilde{x}$. Tedy existuje $\delta > 0$ takové, že graf $\tilde{x}$ na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ leží v K_1. Restrikce $\tilde{x}$ na tento interval nám tedy dává řešení původní rovnice. $\square$

2 Jednoznačnost řešení

V této kapitole se budeme věnovat otázce jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic. V praxi to často požadujeme, například proto, aby nějaká simulace byla deterministická.

Definice 2.1. Řekneme, že rovnice (1) má v Ω vlastnost *globální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení $(x, I), (y, J)$ splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cup J$, potom $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in I \cup J$. Řekneme, že rovnice (1) má v Ω vlastnost *lokální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení $(x, I), (y, J)$ splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cup J$, potom existuje δ takové, že $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Věta 2.2. *Rovnice* (1) *má v* Ω *vlastnost globální jednoznačnosti právě tehdy, když má vlastnost lokální jednoznačnosti.*

Důkaz. Implikace směrem doprava je triviální (funkce, které se rovnají na celé množině se nutně musí rovnat i na nějakém okolí zkoumaného bodu).

Pro důkaz opačné implikace nechť máme dvě řešení $(x, I), (y, J)$ splňující $x(t_0) = y(t_0) = x_0$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$. Bez újmy na obecnosti nechť $I \cup J = (a, b)$. Položme $M = \{t : x(t) = y(t)\}$. Tato množina je díky předpokladu neprázdná, nechť $c := \sup M$.

Pro spor předpokládejme, že $c < b$. Potom platí $x(c) = \lim_{t \to c^-} x(t) = \lim_{t \to c^-} y(t)$, což se díky spojitosti y rovná $y(c)$. Tedy c je maximum M. Ale díky lokální jednoznačnosti existuje okolí $(c, x(c)$, na kterém platí $x = y$. Tedy $x(c + \delta) = y(c + \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$, což je spor s tím, že $c = \sup M$. $\square$

Definice 2.3. Funkce f se nazývá *lokálně lipschitzovská vzhledem k* x v Ω, jestliže pro každé $(x_0, t_0) \in \Omega$ existují L a $\delta > 0$ takové, že

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|$$

pro všechna $(x, t), (y, t) \in U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Věta 2.4. *Nechť* f *je lokálně lipschitzovská vzhledem k* x *v* Ω. *Potom rovnice* (1) *má v* Ω *vlastnost lokální jednoznačnosti.*

Důkaz. Volme $(x_0, t_0) \in \Omega$ a dvě řešení $(x, I), (y, J)$ taková, že $y(t_0) = x(y_0) = x_0$. Vezmeme $\delta_1 > 0$ tak, aby f byla lipschitzovská na δ_1-okolí (x_0, t_0). Nechť $\delta \leq \frac{1}{2L}$ je takové, že navíc $\delta < \delta_1$ a t takové, aby $(x(t), t), (y(t), t) \in U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Potom platí

$$\|x(t) - y(t)\| = \|x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds - (x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)ds)\| \leq$$

$$\left| \int_{t_0}^{t} \|f(x(s), s) - f(y(s), s)\| ds \right| \leq \left| \int L\|x(s) - y(s)\| ds \right| \leq L \cdot \gamma \cdot \delta \leq \frac{\gamma}{2}$$

pro $\gamma := \sup \|x(s) - y(s)\|$. To platí pro všechna t, tedy $\gamma = \sup \|x(t) - y(t)\| \leq \frac{\gamma}{2}$, z čehož plyne $\gamma = 0$, což implikuje rovnost $x(t)$ a $y(t)$. $\square$

Zavedeme značení $f \in C^1_x(\Omega)$, jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existují a jsou spojité v Ω pro každé i.

Lemma 2.5. *Nechť $f \in C^1_x(\Omega)$. Potom f je lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω.*

Důkaz. Mějme $(x_0, t_0) \in \Omega$. Nechť $\delta > 0$ je takové, že množina

$$M = \overline{U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)}$$

je podmnožinou Ω. Z kompaktnosti M máme, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou omezené konstantou K.

Dále mějme dva body $(x, t), (y, t) \in M$. Potom $|f(x,t) - f(y,t)| = |f(x + 0(y - x), t) - f(x + 1(y - x)t)| = |\,[f(x + s(y - x), t)]_0^1\,| = |\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x + s(y - x), t) ds|$. Pro derivaci f platí $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x + s(y - x), t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + s(y - x), t)(y_i - x_i)$. Z toho máme, že

$$\left| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x + s(y - x), t) ds \right| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n K |y_i - x_i| ds = \sum_{i=1}^n K \max_i |y_i - x_i| =$$

$$nK \max |y_i - x_i| \leq nK |y - x|,$$

kde poslední nerovnost plyne z faktu, že $|y - x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2}$.

Tedy f je lokálně Lipschitzovská s konstantou $n \cdot K$. $\square$

Rule of thumb (just for fun): platí f spojitá $\Rightarrow$ existuje řešení, $f \in C^1 \Rightarrow$ řešení je určeno jednoznačně.

konec 2. přednášky (28.2.2025)

3 Maximální řešení

V této kapitole se budeme věnovat otázce rozšíření řešení na co největší podmnožinu prostoru, v němž toto řešení hledáme. Bez újmy na obecnosti budeme dále předpokládat, že f je spojitá (ne nutně lipschitzovská) na Ω (což znamená, že nutně nemusíme mít jednoznačnost řešení).

Definice 3.1. Řešení $(\hat{x}, \hat{I})$ diferenciální rovnice (1) nazýváme *prodloužením* řešení (x, I), jestliže $\hat{I} \supset I$ a $\hat{x}(t) = x(t)$ pro každé $t \in I$. Řešení (x, I) se nazve *maximální*, jestliže nemá žádné netriviální ($\hat{I} \supsetneq I$) prodloužení.

Věta 3.2. *Každé řešení rovnice* (1) *má alespoň jedno maximální prodloužení.*

Důkaz. Mějme řešení (x, I) takové, že $I = (a, b)$. Budeme induktivně prodlužovat za bod b (na druhou stranu se to pak udělá analogicky). Položme $x_0 = x$, $b_0 = b$, $I_0 = I$. V n-tém kroku dostaneme řešení (x_n, I_n), kde $I_n = (a, b_n)$. Dále definujeme $\omega_n = \sup\{z > b_n; (x_n, I_n) \text{ lze prodloužit na } (a, z)\}$. Pokud příslušná množina je prázdná, jsme hotovi, neboť řešení již nejde prodloužit, tedy je maximální.

V opačném případě můžeme definovat $b_{n+1} = \frac{b_n + \omega_n}{2}$ (pokud $\omega_n < \infty$), případně $b_{n+1} = b_n + 1$. Tímto postupem získám rostoucí posloupnost b_n, která musí mít limitu. Označme tuto limitu β. Dále položme $\tilde{I} = (a, \beta)$, $\tilde{x} = x_n(t)$, pro všechna $t \in \tilde{I}$ zvolím n tak, aby $t \in I_n$. Na volbě n nezávisí, neboť na příslušných intervalech jsou funkce x_n stejné.

Dokážeme, že takto definované řešení $(\tilde{x}, \tilde{I})$ je maximální. Pro spor budeme předpokládat, že existuje rozšíření na $(a, \hat{\beta})$ takové, že $\hat{\beta}$. Okamžitě vidíme, že $\beta < \infty$. Vezmeme n takové, aby $\beta - b_n < \hat{\beta} - \beta$ a $\beta - b_n < 1$ (existuje díky tomu, že b_n konvergují k β). V tom případě (x_n, I_n) má prodloužení až do $\hat{\beta}$, tedy $\omega_n \geq \hat{\beta}$. Pak ale (pokud $\omega_n = \infty$) $b_{n+1} = b_n + 1 > \beta$, máme spor, případně pro ω_n konečné máme $b_{n+1} = \frac{b_n + \omega_n}{2} > \frac{2\beta - \hat{\beta} + \hat{\beta}}{2} = \beta$, opět jsme došli ke sporu. □

V případě f lipschitzovské se důkaz dá výrazně zjednodušit. Budeme uvažovat všechna prodloužení řešení x (platí jednoznačnost), dostaneme lineárně uspořádanou množinu, potom díky Zornovu lemmatu existuje maximální prvek.

Věta 3.3 (Picard)**.** *Nechť* $f \in C^1_x(\Omega)$. *Pak pro každé* $(x_0, t_0) \in \Omega$ *existuje právě jedno maximální řešení* x *diferenciální rovnice* (1) *v* Ω *splňující* $x(t_0) = x_0$.

Důkaz. Plyne z Peanovy věty (Věta 1.6) a Věty 3.2. □

Lemma 3.4. *Řešení* (x, I) *diferenciální rovnice* (1) *lze prodloužit za bod* b *právě tehdy, když platí všechny*

(i) $b < \infty$;

(ii) existuje $\lim_{t \to b^-} x(t) =: x_0 \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $(x_0, b) \in \Omega$.

Důkaz. Nutnost těchto podmínek plyne triviálně z podstaty prodloužení (cvičení). Dokážeme, že jde o podmínky postačující. Nechť tedy máme (x_0, b) jakou novou počáteční podmínku, dle Peanovy vety existuje řešení $\hat{x}$ na $(b-\delta, b+\delta)$ splňující tuto počáteční podmínku. Definujeme $\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t), t < b \\ \tilde{x}(t), t \geq b \end{cases}$. Potom $\hat{x}$ je řešení (díky principu nalepování) a navíc prodlužuje x za bod b, což jsme chtěli dokázat. □

Na závěr si uvedeme jednu důležitou větu, která nám poskytne představu o tom, jak vypadají maximální řešení diferenciálních rovnic.

Věta 3.5 (o opuštění kompaktu)**.** *Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní, nechť (x, I) je maximální řešení rovnice* (1) *splňující $(x(t_0), t_0) \in K$ pro nějaké $t_0 \in I$. Potom existují $t_1 > t_0 > t_2$ taková, že $(x(t_1), t_1) \notin K$ a $(x(t_2), t_2) \notin K$.*

Důkaz. Pro spor budeme předpokládat, že takové t_1 neexistuje, chceme dojít ke sporu s maximalitou řešení. Mějme řešení x na (a, b) a $(x(t), t) \in K$ pro všechna $t \in [t_0, b)$. Ukážeme, že toto řešení můžeme prodloužit za b. Využijeme k tomu Lemma 3.4.

Zřejmě platí $b < \infty$ (díky kompaktnosti K). Dále dokážeme, že existuje $\lim_{i \to b^-} x(t)$ pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Mějme $s, t \in (t_0, b)$. Dále díky Lagrangeově větě o střední hodnotě máme

$$\|x(s) - x(t)\| \leq \|x'(\xi)\||s-t| = \|f(x(\xi), \xi)\||s-t| \leq M|s-t|,$$

kde poslední nerovnost plyne z toho, že funkce f je omezená na kompaktu K konstantou M. Nakonec $(x_0, b) = \lim_{t \to b^-}(x(t), t)$, tedy z uzavřenosti K máme, že $(x_0, b) \in K \subset \Omega$.

Zjistili jsme, že řešení lze prodloužit za bod b, což je spor s jeho maximalitou. Důkaz pro t_2 se udělá obdobně. □

4 Závislost na počáteční podmínce

Lemma 4.1 (Gronwall)**.** *Nechť* $w(t), g(t)$ *jsou nezáporné a spojité na nějakém intervalu* I *a nechť* $t_0 \in I, K \geq 0$*. Nechť pro každé* $t \in I$ *platí*

$$w(t) \leq K + \left| \int_{t_0}^{t} w(s)g(s)ds \right|.$$

Potom pro každé $t \in I$ *platí*

$$w(t) \leq K \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} g(s)ds \right| \right).$$

Důkaz. Definujeme $\Phi(t) := K + \int_{t_0}^{t} w(s)g(s)ds + \varepsilon$ pro $t > t_0$. Okamžitě z předpoklady vidíme, že $w(t) \leq \Phi(t)$. Zderivujeme funkci $\Phi(t)$, dostáváme $\Phi'(t) = w(t)g(t) \leq \Phi(t)g(t)$ což po vydělení $\Phi(t)$ (je nenulové díky přičtení ε) nám dává $\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq g(t)$, což můžeme přeintegrovat od t_0 do t, čímž dostaneme $\int_{t_0}^{t} \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} ds \leq \int_{t_0}^{t} g(s)ds$. Po vyčíslení integrálů dostaneme $\log(\Phi(t) - \Phi(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t} g(s)ds$. Jelikož exp je rostoucí funkce, můžeme psát $\frac{\Phi(t)}{\Phi(t_0)} \leq \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right)$.

Nakonec dostáváme $w(t) \leq \Phi(t) \leq (K + \varepsilon) \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right)$. Požadované tvrzení získáme posláním ε do 0. □

konec 3. přednášky (7.3.2025)