Obyčejné diferenciální rovnice (NMMA336)

Petr Velička [*]
přednášející: doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D. [†]

LS 2024/25

[*] petrvel@matfyz.cz
[†] barta@karlin.mff.cuni.cz

1 Lokální existence řešení

Diferenciální rovnice nás doprovází v každé oblasti lidského života. Neexistuje obecná teorie, která by nám umožnila vyřešit všechny diferenciální rovnice najednou. Musíme se proto omezit jen na část rovnic.

Úmluva 1.1. V této přednášce budeme studovat systém rovnic

$$x' = f(x,t) \tag{1}$$

za trvalého předpokladu $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá.

Definice 1.2. Buď I otevřený interval. Funkci $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ nazveme *řešením* diferenciální rovnice (1) v Ω, jestliže pro všechna $t \in I$ platí

(i) $(x(t), t) \in \Omega$,

(ii) existuje vlastní $x'(t)$,

(iii) $x'(t) = f(x(t), t)$.

Takto definované řešení je nutně spojité a má spojitou derivaci (je třídy C^1), tzv. klasické řešení. Dále si poznamenejme, že platí tzv. princip nalepování: Pokud máme $x(t)$ řešení na (a, t_0) a na (t_0, b), pak už je řešením na celém (a, b). To plyne z toho, že $x'_-(t_0) = \lim_{t\to t_0^-} x'(t) = \lim_{t\to t_0^-} f(x(t), t) = f(x(t_0), t_0)$, přičemž tatáž rovnost platí i pro derivaci zprava.

Lemma 1.3. *Nechť I je otevřený interval, $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ spojitá splňující $(x(t), t) \in \Omega$ pro každé $t \in I$ a nechť $t_0 \in I$. Potom je ekvivalentní*

(i) x je řešení (1) splňující $x(t_0) = x_0$,

(ii) pro každé $t \in I$ platí $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s)ds$.

Důkaz. Víme, že platí $x'(s) = f(x(s), s)$ pro všechna $s \in I$, což je spojitá funkce, kterou můžeme zintegrovat na $[t_0, t]$. Potom z Newtonova-Leibnizova vzorce máme $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t x'(s)ds = \int_{t_0}^t f(x(s), s)ds$. Tedy $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s)ds$.

Pro důkaz opačné strany si uvědomíme, ze pro každé $t \in I$ je pravá strana diferencovatelná, tedy $x'(t) = f(x(t), t)$ a po dosazení $t = t_0$ dostáváme $x(t_0) = x_0$. □

Teď si zadefinujeme několik pojmů, které charakterizují množiny funkcí, které se chovají jistým způsobem podobně nebo stejně.

Definice 1.4. Řekneme, že funkce množiny $M \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ jsou

1. *stejně spojité*, jestliže pro každé $x \in K$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ pro všechna $y \in (x - \delta, x + \delta)$ a všechny $f \in M$.

2. *stejně omezené*, jestliže existuje $C > 0$ takové, že $\|f\| \leq C$ pro všechna $f \in M$.

Věta 1.5 (Arzela-Ascoli). *Nechť funkce $x_n(t)$ jsou stejně omezené a stejně spojité na $[0, T]$. Potom z nich lze vybrat stejnoměrně konvergující posloupnost. (bez důkazu)*

Následující věta nám říká, že na nějakém okolí libovolného bodu existuje řešení zkoumané diferenciální rovnice.

Věta 1.6 (Peano). *Nechť $(x_0, t_0) \in \Omega$. Pak existuje $\delta > 0$ a funkce $x(t) : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$, která je řešením (1) a splňuje $x(t_0) = x_0$.*

K důkazu této věty budeme potřebovat pomocné lemma:

Lemma 1.7. *Pokud $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ a f je omezená na Ω, pak pro každé $T > 0$ existuje řešení (1) na $(t_0 - T, t_0 + T)$ splňující $x(t_0) = x_0$.*

Důkaz. Řešme "porušenou" úlohu P_λ: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s-\lambda), s)ds$ pro $t > t_0$ a $x(t) = x_0$ pro $t \in [t_0 - \lambda, t_0]$. Na $I_1 := (t_0, t_0 + \lambda]$ definujeme $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \lambda, s)ds$. Na $I_2 := (t_0 + \lambda, t_0 + 2\lambda]$ definujeme $x(t)$ obdobně a indukcí pokračujeme dokud $t_0 + k\lambda$ nebude větší než T. Tímto je "porušená" úloha vyřešena na $[t_0 - \lambda, t_0 + T]$.

Položme $\lambda = \frac{1}{n}$ pro $n = 1, 2, \ldots$. Pišme dále jen x_n namísto $x_{1/n}$, tedy řešení úloh $P_{\frac{1}{n}}$ tvoří posloupnost funkcí. Ukážeme, že jsou stejně spojité a stejně omezené. Stejná omezenost plyne z toho, že $\|x_n(t)\| = \|x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s)ds\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s)\|ds$. Ale funkce f je omezená, tedy máme $\|x_n(t)\| \leq \|x_0\| + (T - t_0) \cdot K$, kde K je příslušná konstanta omezenosti f. Stejnou spojitost máme z odhadu $\|x_n(t) - x_n(r)\| = \| \int_r^t f(x(s - \frac{1}{n}), s)ds\| \leq |t - r| \cdot K$. V poslední nerovnosti jsme odhadli integrál součinem délky intervalu a konstantou omezenosti funkce f. Stačí položit $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, potom $\|x_n(t) - x_r(t)\| < \delta K = \varepsilon$.

Tedy dle Věty 1.5 můžeme z posloupnosti x_n vybrat stejnoměrně konvergentní podposloupnost x_{n_k}. Zbývá dokázat, že její limita řeší naši rovnici.

konec 1. přednášky (21.2.2025)

Zřejmě pro $k \to \infty$ platí $x_{n_k} \to x(t)$ a pokud $\int_{t_0}^t f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n}), s)ds$ konverguje k $\int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s)ds$, máme hotovo. Tato vlastnost plyne z toho, že $\| \int_{t_0}^t f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s), s)ds\| \leq \int_{t_0}^t \|f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s - \frac{1}{n_k}), s)\| + \|f(x(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s), s\|ds$.

Jelikož f je spojitá, musí být stejnoměrně spojitá na kompaktní množině $[t_0, t_0 + T] \times \overline{B(0, r) \cap \Omega}$, jinými slovy platí, že pro $\varepsilon > 0$ existuje δ takové, že pro každé dva body x, y takové, že $\|x - y\| < \delta$ máme, že $f(x, s) - f(y, \hat{(}s))$.

Ze stejnoměrné konvergence x_{n_k} máme, že pro $\delta > 0$ existuje k_0 takové, že pro všechna $k \geq k_0$ platí $\|x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}) - x(s - \frac{1}{n_k})\| < \delta$.

Jelikož x je spojitá, na kompaktním intervalu $[t_0, t_0 + T]$ je také stejnoměrně spojitá. Potom pro $\delta > 0$ existuje k_1 takové, že pro všechna $k \geq k_1$ platí $\|x(s - \frac{1}{n_k} - x(s)\| < \delta$.

Potom pro všechna $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ platí, že náš integrál je menší nebo roven $\int_{t_0}^{t} \varepsilon + \varepsilon ds \leq T \cdot 2\varepsilon$, tedy jsme opravdu nalezli požadované řešení.

Existence řešení na $[t_0 - T, t_0]$ se ukáže podobně. $\square$

Důkaz Věty 1.6. Uvažujme dvě koule kolem bodu (x_0, t_0) takové, že $K_1 \subset K_2 \subset \Omega$. Definujeme $\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t) \text{ v } K_1, \\ \text{spojitě v } K_2 \setminus K_1 \\ 0, (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus K_2 \end{cases}$.

Z Lemmatu 1.7 máme, že rovnice $x' = \tilde{f}(x,t)$ má řešení x splňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$. Nazveme toto řešení $\tilde{x}$. Potom ze spojitosti $\tilde{x}$. Tedy existuje $\delta > 0$ takové, že graf $\tilde{x}$ na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ leží v K_1. Restrikce $\tilde{x}$ na tento interval nám tedy dává řešení původní rovnice. $\square$

2 Jednoznačnost řešení

V této kapitole se budeme věnovat otázce jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic. V praxi to často požadujeme, například proto, aby nějaká simulace byla deterministická.

Definice 2.1. Řekneme, že rovnice (1) má v Ω vlastnost *globální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení $(x, I), (y, J)$ splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cup J$, potom $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in I \cup J$. Řekneme, že rovnice (1) má v Ω vlastnost *lokální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení $(x, I), (y, J)$ splňující $x(t_0) = y(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in I \cup J$, potom existuje δ takové, že $x(t) = y(t)$ pro všechna $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Věta 2.2. *Rovnice* (1) *má v* Ω *vlastnost globální jednoznačnosti právě tehdy, když má vlastnost lokální jednoznačnosti.*

Důkaz. Implikace směrem doprava je triviální (funkce, které se rovnají na celé množině se nutně musí rovnat i na nějakém okolí zkoumaného bodu).

Pro důkaz opačné implikace nechť máme dvě řešení $(x, I), (y, J)$ splňující $x(t_0) = y(t_0) = x_0$ pro nějaké $t_0 \in I \cap J$. Bez újmy na obecnosti nechť $I \cup J = (a, b)$. Položme $M = \{t : x(t) = y(t)\}$. Tato množina je díky předpokladu neprázdná, nechť $c := \sup M$.

Pro spor předpokládejme, že $c < b$. Potom platí $x(c) = \lim_{t \to c^-} x(t) = \lim_{t \to c^-} y(t)$, což se díky spojitosti y rovná $y(c)$. Tedy c je maximum M. Ale díky lokální jednoznačnosti existuje okolí $(c, x(c)$, na kterém platí $x = y$. Tedy $x(c + \delta) = y(c + \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$, což je spor s tím, že $c = \sup M$. $\square$

Definice 2.3. Funkce f se nazývá *lokálně lipschitzovská vzhledem k* x v Ω, jestliže pro každé $(x_0, t_0) \in \Omega$ existují L a $\delta > 0$ takové, že

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|$$

pro všechna $(x, t), (y, t) \in U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Věta 2.4. *Nechť* f *je lokálně lipschitzovská vzhledem k* x *v* Ω. *Potom rovnice* (1) *má v* Ω *vlastnost lokální jednoznačnosti.*

Důkaz. Volme $(x_0, t_0) \in \Omega$ a dvě řešení $(x, I), (y, J)$ taková, že $y(t_0) = x(y_0) = x_0$. Vezmeme $\delta_1 > 0$ tak, aby f byla lipschitzovská na δ_1-okolí (x_0, t_0). Nechť $\delta \leq \frac{1}{2L}$ je takové, že navíc $\delta < \delta_1$ a t takové, aby $(x(t), t), (y(t), t) \in U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Potom platí

$$\|x(t) - y(t)\| = \|x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) ds - (x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s) ds)\| \leq$$

$$\left| \int_{t_0}^{t} \|f(x(s), s) - f(y(s), s)\| ds \right| \leq \left| \int L \|x(s) - y(s)\| ds \right| \leq L \cdot \gamma \cdot \delta \leq \frac{\gamma}{2}$$

pro $\gamma := \sup \|x(s) - y(s)\|$. To platí pro všechna t, tedy $\gamma = \sup \|x(t) - y(t)\| \leq \frac{\gamma}{2}$, z čehož plyne $\gamma = 0$, což implikuje rovnost $x(t)$ a $y(t)$. $\square$

Zavedeme značení $f \in C^1_x(\Omega)$, jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existují a jsou spojité v Ω pro každé i.

Lemma 2.5. *Nechť $f \in C^1_x(\Omega)$. Potom f je lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω.*

Důkaz. Mějme $(x_0, t_0) \in \Omega$. Nechť $\delta > 0$ je takové, že množina

$$M = \overline{U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)}$$

je podmnožinou Ω. Z kompaktnosti M máme, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou omezené konstantou K.

Dále mějme dva body $(x, t), (y, t) \in M$. Potom $|f(x, t) - f(y, t)| = |f(x + 0(y - x), t) - f(x + 1(y - x)t)| = |\left[f(x + s(y - x), t)\right]_0^1| = |\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x + s(y - x), t) ds|$. Pro derivaci f platí $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x + s(y - x), t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + s(y - x), t)(y_i - x_i)$. Z toho máme, že

$$\left| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x + s(y - x), t) ds \right| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n K|y_i - x_i| ds = \sum_{i=1}^n K \max_i |y_i - x_i| =$$

$$nK \max |y_i - x_i| \leq nK|y - x|,$$

kde poslední nerovnost plyne z faktu, že $|y - x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2}$.

Tedy f je lokálně Lipschitzovská s konstantou $n \cdot K$. $\square$

Rule of thumb (just for fun): platí f spojitá $\Rightarrow$ existuje řešení, $f \in C^1 \Rightarrow$ řešení je určeno jednoznačně.

konec 2. přednášky (28.2.2025)

3 Maximální řešení

V této kapitole se budeme věnovat otázce rozšíření řešení na co největší podmnožinu prostoru, v němž toto řešení hledáme. Bez újmy na obecnosti budeme dále předpokládat, že f je spojitá (ne nutně lipschitzovská) na Ω (což znamená, že nutně nemusíme mít jednoznačnost řešení).

Definice 3.1. Řešení $(\hat{x}, \hat{I})$ diferenciální rovnice (1) nazýváme *prodloužením* řešení (x, I), jestliže $\hat{I} \supset I$ a $\hat{x}(t) = x(t)$ pro každé $t \in I$. Řešení (x, I) se nazve *maximální*, jestliže nemá žádné netriviální ($\hat{I} \supsetneq I$) prodloužení.

Věta 3.2. *Každé řešení rovnice* (1) *má alespoň jedno maximální prodloužení.*

Důkaz. Mějme řešení (x, I) takové, že $I = (a, b)$. Budeme induktivně prodlužovat za bod b (na druhou stranu se to pak udělá analogicky). Položme $x_0 = x$, $b_0 = b$, $I_0 = I$. V n-tém kroku dostaneme řešení (x_n, I_n), kde $I_n = (a, b_n)$. Dále definujeme $\omega_n = \sup\{z > b_n; (x_n, I_n)$ lze prodloužit na $(a, z)\}$. Pokud příslušná množina je prázdná, jsme hotovi, neboť řešení již nejde prodloužit, tedy je maximální.

V opačném případě můžeme definovat $b_{n+1} = \frac{b_n+\omega_n}{2}$ (pokud $\omega_n < \infty$), případně $b_{n+1} = b_n + 1$. Tímto postupem získám rostoucí posloupnost b_n, která musí mít limitu. Označme tuto limitu β. Dále položme $\tilde{I} = (a, \beta)$, $\tilde{x} = x_n(t)$, pro všechna $t \in \tilde{I}$ zvolím n tak, aby $t \in I_n$. Na volbě n nezávisí, neboť na příslušných intervalech jsou funkce x_n stejné.

Dokážeme, že takto definované řešení $(\tilde{x}, \tilde{I})$ je maximální. Pro spor budeme předpokládat, že existuje rozšíření na $(a, \hat{\beta})$ takové, že $\hat{\beta}$. Okamžitě vidíme, že $\beta < \infty$. Vezmeme n takové, aby $\beta - b_n < \hat{\beta} - \beta$ a $\beta - b_n < 1$ (existuje díky tomu, že b_n konvergují k β). V tom případě (x_n, I_n) má prodloužení až do $\hat{\beta}$, tedy $\omega_n \geq \hat{\beta}$. Pak ale (pokud $\omega_n = \infty$) $b_{n+1} = b_n + 1 > \beta$, máme spor, případně pro ω_n konečné máme $b_{n+1} = \frac{b_n+\omega_n}{2} > \frac{2\beta-\hat{\beta}+\hat{\beta}}{2} = \beta$, opět jsme došli ke sporu. □

V případě f lipschitzovské se důkaz dá výrazně zjednodušit. Budeme uvažovat všechna prodloužení řešení x (platí jednoznačnost), dostaneme lineárně uspořádanou množinu, potom díky Zornovu lemmatu existuje maximální prvek.

Věta 3.3 (Picard)**.** *Nechť* $f \in C^1_x(\Omega)$. *Pak pro každé* $(x_0, t_0) \in \Omega$ *existuje právě jedno maximální řešení* x *diferenciální rovnice* (1) *v* Ω *splňující* $x(t_0) = x_0$.

Důkaz. Plyne z Peanovy věty (Věta 1.6) a Věty 3.2. □

Lemma 3.4. *Řešení* (x, I) *diferenciální rovnice* (1) *lze prodloužit za bod* b *právě tehdy, když platí všechny*

(i) $b < \infty$;

(ii) existuje $\lim_{t \to b^-} x(t) =: x_0 \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $(x_0, b) \in \Omega$.

Důkaz. Nutnost těchto podmínek plyne triviálně z podstaty prodloužení (cvičení). Dokážeme, že jde o podmínky postačující. Nechť tedy máme (x_0, b) jakou novou počáteční podmínku, dle Peanovy vety existuje řešení $\hat{x}$ na $(b-\delta, b+\delta)$ splňující tuto počáteční podmínku. Definujeme $\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t), t < b \\ \tilde{x}(t), t \geq b \end{cases}$. Potom $\hat{x}$ je řešení (díky principu nalepování) a navíc prodlužuje x za bod b, což jsme chtěli dokázat. □

Na závěr si uvedeme jednu důležitou větu, která nám poskytne představu o tom, jak vypadají maximální řešení diferenciálních rovnic.

Věta 3.5 (Opuštění kompaktu)**.** *Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní, nechť (x, I) je maximální řešení rovnice* (1) *splňující $(x(t_0), t_0) \in K$ pro nějaké $t_0 \in I$. Potom existují $t_1 > t_0 > t_2$ taková, že $(x(t_1), t_1) \notin K$ a $(x(t_2), t_2) \notin K$.*

Důkaz. Pro spor budeme předpokládat, že takové t_1 neexistuje, chceme dojít ke sporu s maximalitou řešení. Mějme řešení x na (a, b) a $(x(t), t) \in K$ pro všechna $t \in [t_0, b)$. Ukážeme, že toto řešení můžeme prodloužit za b. Využijeme k tomu Lemma 3.4.

Zřejmě platí $b < \infty$ (díky kompaktnosti K). Dále dokážeme, že existuje $\lim_{i \to b^-} x(t)$ pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Mějme $s, t \in (t_0, b)$. Dále díky Lagrangeově větě o střední hodnotě máme

$$\|x(s) - x(t)\| \leq \|x'(\xi)\| |s - t| = \|f(x(\xi), \xi)\| |s - t| \leq M|s - t|,$$

kde poslední nerovnost plyne z toho, že funkce f je omezená na kompaktu K konstantou M. Nakonec $(x_0, b) = \lim_{t \to b^-}(x(t), t)$, tedy z uzavřenosti K máme, že $(x_0, b) \in K \subset \Omega$.

Zjistili jsme, že řešení lze prodloužit za bod b, což je spor s jeho maximalitou. Důkaz pro t_2 se udělá obdobně. □

4 Závislost na počáteční podmínce

Lemma 4.1 (Gronwall)**.** *Nechť $w(t), g(t)$ jsou nezáporné a spojité na nějakém intervalu I a nechť $t_0 \in I, K \geq 0$. Nechť pro každé $t \in I$ platí*

$$w(t) \leq K + \left| \int_{t_0}^{t} w(s)g(s)ds \right|.$$

Potom pro každé $t \in I$ platí

$$w(t) \leq K \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} g(s)ds \right| \right).$$

Důkaz. Definujeme $\Phi(t) := K + \int_{t_0}^{t} w(s)g(s)ds + \varepsilon$ pro $t > t_0$. Okamžitě z předpoklady vidíme, že $w(t) \leq \Phi(t)$. Zderivujeme funkci $\Phi(t)$, dostáváme $\Phi'(t) = w(t)g(t) \leq \Phi(t)g(t)$ což po vydělení $\Phi(t)$ (je nenulové díky přičtení ε) nám dává $\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq g(t)$, což můžeme přeintegrovat od t_0 do t, čímž dostaneme $\int_{t_0}^{t} \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} ds \leq \int_{t_0}^{t} g(s)ds$. Po vyčíslení integrálů dostaneme $\log(\Phi(t) - \Phi(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t} g(s)ds$. Jelikož exp je rostoucí funkce, můžeme psát $\frac{\Phi(t)}{\Phi(t_0)} \leq \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds \right)$.

Nakonec dostáváme $w(t) \leq \Phi(t) \leq (K + \varepsilon) \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds \right)$. Požadované tvrzení získáme posláním ε do 0. □

konec 3. přednášky (7.3.2025)

Lemma 4.2. *Nechť f je globálně L-lipschitzovská v Ω vzhledem k x. Potom pro libovolná dvě řešení $(x, I), (y, J)$ v Ω a body $t, t_0 \in I \cap J$ platí*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| \exp(L|t - t_0|).$$

Důkaz. Můžeme psát

$$\|x(t) - y(t)\| = \|x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds - (y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y(s), s)ds)\| \leq$$

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| + \| \int_{t_0}^{t} |f(x(s), s) - f(y(s), s)| \, ds\| \leq$$

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| + \| \int_{t_0}^{t} L|x(s) - y(s)|ds.$$

Poté z Gronwallova lemmatu dostáváme, že

$$\|x(t) - y(t)\| \leq K e^{| \int_{t_0}^{t} L ds|} = K e^{|t - t_0| L},$$

kde funkci $w(s)$ ze znění lemmatu odpovídá výraz $\|x(s) - y(s)\|$. □

Jednoduchým důsledkem tohoto lemmatu je mj. jednoznačnost řešení (stačí uvažovat řešení s $x(t_0) = y(t_0)$).

Definice 4.3. Nechť f je spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k x v Ω. Potom definujeme *řešicí funcki* $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n$ předpisem $\varphi(t; t_0, x_0) := x(t)$, kde $x : I \to \mathbb{R}^n$ je řešení splňující počáteční podmínku $x(x_0) = t_0$ a $t \in I$. Zde G je maximální možná, tj. obsahuje všechny trojice $(t; t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2}$ pro něž výraz $\varphi(t; t_0, x_0)$ má smysl.

Například, uvažujeme-li rovnici $x'(t) = x(t)$. Obecným řešením této rovnice je funkce $x(t) = ce^t$, vyřešením rovnice s počáteční podmínkou dostaneme řešicí funkci $\varphi(t; t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}$.

Věta 4.4. *Množina G z předchozí definice je otevřená a φ je spojitá na G.*

Důkaz. Intermezzo: otevřenost G znamená, že pro každé $(x_0, t_0) \in \Omega$ a t existuje $r > 0$ takové, že pokud $\|(y_0, s_0) - (t_0, x_0)\|$, potom řešení y procházející bodem (y_0, s_0) je definované v bodech $(t - r, t + r)$, spojitost pak odpovídá tomu, že toto řešení bude po celou dobu "blízko" toho původního.

Bez újmy na obecnosti nechť $t_0 > t$. Vezměme $(t; t_0, x_0) \in G$, buď x maximální řešení s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. Pak $[t_0, t] \subset D_x$ (řešení je definováno na celém tomto intervalu). Vezměme $\delta > 0$ tak malé, aby $[t_0, t + 2\delta] \subset D_x$ (to můžeme, neboť D_x je otevřená) a zároveň $K_\delta := \{(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : s \in [t_0 - \delta, t + \delta] \wedge |y(s) - x(s)| \le \delta\} \subset \Omega$. Takto definovaná množina K_δ je kompaktní a tedy f je na K_δ omezená konstantou c_0 (spojitá funkce na kompaktu) díky čemuž z lokální lipschitzovskosti plyne globální L-lipschitzovskost vzhledem k x.

Dokážeme, že řešení "blízko" toho původního neopustí "rouru" K_δ. Zvolme $\varepsilon > 0$ takové, aby $\varepsilon < \frac{\delta}{2(1+c_0)e^{L(t-t_0+2\delta)}}$. Vezměme y_0, s_0 tak, aby $|s_0 - t_0| < \varepsilon$, $|x_0 - y_0| < \varepsilon$. Dále vezmeme y maximální řešení s podmínkou $y(s_0) = y_0$. Chceme dokázat, že y je definované aspoň na intervalu $[s_0, t + \delta]$ a platí $|y(s) - x(s)| \le \delta$ pro všechna $s \in [s_0, t + \delta]$.

Můžeme psát

$$|y(s_0) - x(s_0)| \le |y(s_0) - x(t_0)| + |x(t_0) - x(s_0)| \le$$

$$|y_0 - x_0| + |x'(\xi)||t_0 - s_0| \le (1 + c_0)\varepsilon,$$

kde ξ je konstanta z Lagrangeovy věty, která ve vícerozměrném prostoru platí pouze jako neostrá nerovnost.

Dále odhadujme (použijeme Lemma 4.2)

$$|y(s) - x(s)| \le |y(s_0) - x(s_0)|e^{L|s-s_0|} \le (1 + c_0)\varepsilon e^{L|s-s_0|} \le (1 + c_0)\varepsilon e^{L(t-t_0+2\delta)},$$

kde uvažujeme pouze body s, pro které existuje $y(s)$ a y leží v K_δ na $[s_0, s]$. Z volby ε dostáváme navíc

$$|y(s) - x(s)| \le (1 + c_0)\varepsilon e^{L(t-t_0+2\delta)} < \frac{\delta}{2}. \tag{2}$$

Maximální řešení y opustí kompakt (Věta 3.5) K_δ někde za časem s_0. Označme γ čas prvního opuštění (přesněji řečeno infimum všech časů, kdy to už není v tom kompaktu). Na intervalu $[s_0, \gamma]$ platí odhad (2), tedy $|y(\gamma) - x(\gamma)| < \frac{\delta}{2}$, z čehož máme $\gamma = t + \delta$, to znamená, že kompakt nemůžeme opustit jinak než za časem t. Tím jsme dokázali otevřenost G.

Dokážeme spojitost φ na G. Vezměme dva body $(t; t_0, x_0)$ a $(s; s_0, y_0)$ jako minule a uvažujme rozdíl

$$|\varphi(t;t_0,x_0) - \varphi(s,s_0,y_0)| \leq |\varphi(t;t_0,x_0) - \varphi(s;t_0,x_0)| +$$

$$|\varphi(s;t_0,x_0) - \varphi(s;s_0,y_0)| \leq |x(t) - x(s)| + |x(s) - y(s)| \leq$$

$$c_0(t-s) + |x(s_0) - y(s_0)e^{L|s-s_0|}| \leq c_0|t-s| + (1+c_0)e^{L|s-s_0|}|x_0 - y_0|,$$

čímž jsme ukázali lipschitzovskost, a tedy spojitost φ na G. □

Z hlediska praktických aplikací často uvažujeme rovnici (1) ve tvaru $x' = f(x, t, \lambda)$ závislém na hodnotě parametru λ. Přidejme druhou rovnici $\lambda' = 0$ a počáteční podmínky $x(t_0) = 0$ a $\lambda(t_0) = \lambda_0$, čímž jsme závislost na parametru převedli na závislost na počáteční podmínce (v případě, že f je závisí na λ lipschitzovsky).

Označme pro účely následující věty $\frac{\partial}{\partial w}$ derivaci ve směru $w \in \mathbb{R}^n$ dle proměnné x_0.

Věta 4.5. *Nechť $f \in C^1_x(\Omega), w \in \mathbb{R}^n$. Potom $\frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ existuje v každém bodě G. Označíme-li $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ a $u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$, pak funkce u je řešením rovnice ve variacích*

$$u' = \nabla_x f(x(t), t)u, u(t_0) = w. \tag{3}$$

konec 4. přednášky (14.3.2025)

Důkaz. Větu dokážeme za silnějšího předpokladu $f \in C^2_x(\Omega)$.

Vezmeme pevně bod (x_0, t_0) a víme, že tímto bodem prochází právě jedno maximální řešení, označíme ho $x(t)$. Dále označme $A(t) = \nabla_x f(x(t), t)$. Potom $A(t)$ je matice $n \times n$. Vezmeme pevné $w \in \mathbb{R}^n$ a označme $u(t)$ maximální řešení počáteční úlohy (3).

Dle Věty 5.4 existuje právě jedno řešení a je definované na celém intervalu, kde je definovaná $A(t)$. Chceme dokázat, že $u(t) = \frac{\partial}{\partial w}\varphi(t, t_0, x_0)$. Z definice máme, že

$$\frac{\partial}{\partial w}\varphi(t, t_0, x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0).$$

Vezmeme t pevné tak, aby $(t, t_0, x_0) \in G$, tedy $x(t)$ je dobře definované. Vezmeme dost malé h tak, aby $\varphi(t, t_0, x_0 + hw)$ bylo definované. Položme $y_h(t) := \varphi(t, t_0, x_0 + hw)$.

Definujeme funkci $\eta_h(t) = \frac{1}{h}(y_h(t) - x(t)) - u(t)$. Ukážeme, že $\lim_{h \to 0} \eta_h(t) = 0$. Pišme

$$\eta_h'(t) = \frac{1}{h}(y_h'(t) - x'(t)) - u'(t) = \frac{1}{h}(f(y_h(t), t) - f(x(t), t)) - \nabla_x f(x(t), t)u(t).$$

Použijeme Taylorův rozvoj prvního řádu pro funkci f, dostaneme

$$\eta_h'(t) = \frac{1}{h}(\nabla_x f(x(t),t)(y_h(t) - x(t)) +$$

$$\frac{1}{2}(y_h(t) - x(t))^T \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x(t),t)(y_n(t) - x(t)) - \nabla_x f(t, x(t))u(t).$$

Tedy máme, že

$$\eta_h'(t) = \nabla_x f(x(t),t)\left[\frac{1}{h}(y_h(t) - x(t)) - u(t)\right] + \frac{1}{h} z_n(t).$$

Potom $\eta_h'(t) = A(t)\eta_h(t) + z_n(t)$.

Pro h malé je vše v K_δ z Věty 4.4. Na K_δ jsou $\nabla_x f$ a $\nabla_x^2 f$ omezené $\leq M$. Zde předpokládáme, že $f \in C_x^2(\Omega)$. Potom z Lemmatu 4.2 můžeme psát

$$\|z_h(t)\| \leq \frac{1}{2}M\|y_h(t) - x(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}M\|y_h(t_0) - x(t_0)\|^2 e^{2M|t-t_0|} \leq Ch^2\|w\|^2.$$

Uvědomíme si, že $\eta_h(t_0) = 0$ a napíšeme integrální rovnici odpovídající diferenciální rovnici pro η_h'

$$\eta_h(t) = \eta_h(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)\eta_h(s) + z_n(s)ds,$$

Tedy $\|\eta_h(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^t M\|\eta_h(s)\| + Chds\right| = C|t-t_0|h + \left|\int_{t_0}^t M\|\eta_h(s)ds\right|$. Použijeme Gronwallovo lemma (Lemma 4.1), dostaneme.

$$\|\eta_h(t)\| \leq \tilde{C}he^{M|t-t_0|},$$

tedy $\eta_h(t) \to 0$ pro $h \to 0$, čímž je důkaz ukončen. □

Ukážeme si jednu aplikaci následující věty pro výpočet derivace řešící funkce.

Příklad 4.6. Mějme rovnici $x' = x$, její řešící funkce má tvar $\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}$. Potom $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(t, t_0, x_0) = e^{t-t_0}$. Totéž můžeme spočítat z předchozí věty. Hledaná funkce řeší diferenciální rovnici $u' = u$ s počáteční podmínkou $u(t_0) = t$. Jejím řešením je e^{t-t_0}, což jsme chtěli dokázat.

Za uvedených předpokladů dokonce $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}w}$ závisí spojitě na x_0 tj. řešicí funkce je diferencovatelná (má totální diferenciál) vzhledem k x_0. Lze též ukázat, že φ je diferencovatelná vůči t a t_0.

5 Lineární rovnice

Definice 5.1. *Normu matice* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme

$$\|A\| = \sup\{|Ax|; x \in \mathbb{R}^n, |x| \le 1\},$$

kde $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ je norma vektoru $x \in \mathbb{R}^n$.

Věta 5.2 (Vlastnosti normy matice)**.** *Nechť* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Potom:*

(i) $\|A\| \ge 0$ *a* $\|A\| = 0$ *právě když* $A = 0$*.*

(ii) $\|aA\| = |a|\|A\|$ *pro všechna* $a \in \mathbb{R}$*.*

(iii) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$*.*

(iv) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$*.*

(v) $|Ax| \le \|A\||x|$ *pro* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

(vi) Je-li A *regulární, pak* $Ay \ge \frac{|y|}{\|A^{-1}\|}$ *pro* $y \in \mathbb{R}^n$*.*

Důkaz. První tři vlastnosti říkají, že operátor $\|\cdot\|$ je norma (cvičení).

Dokážeme vlastnost (v). Případ $x = 0$ je triviální, nechť tedy $x \neq 0$. Položme $y = \frac{x}{|x|}$. Potom můžeme psát

$$|Ax| = |A(|x|y)| = ||x|Ay| = |x||Ay| \le |x|\|A\|.$$

K důkazu vlastnosti (iv) můžeme psát $|ABx| \le \|A\|\|B\||x|$, kde jsme dvakrát použili již dokázanou vlastnost (v). Potom

$$\|AB\| = \sup_{|x|\le 1} |ABx| \le \sup_{|x|\le 1} \|A\|\|B\||x| \le \|A\|\|B\| \cdot 1.$$

Nakonec, pro vlastnost (vi) položme $v := Ay$, tedy $y = A^{-1}v$. Potom

$$|y| = |A^{-1}v| \le \|A^{-1}\||v| = \|A^{-1}\||Ay|, \text{ tedy } |Ay| \ge \frac{|y|}{\|A^{-1}\|},$$

čímž je důkaz ukončen. □

Definice 5.3. *Lineární rovnicí* rozumíme rovnici

$$x' = A(t)x + g(t), x(t_0) = x_0, \tag{4}$$

kde $A(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^{n\times n}, g(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojité.

V přednášce MA3 jste již studovali tento typ rovnic, teď se však budeme věnovat obecnějšímu případu, kdy A a g závisí na t.

Věta 5.4. *Nechť* $t_0 \in (a, b), x_0 \in \mathbb{R}^n$ *je dáno. Pak existuje jediné řešení rovnice (4) definované na celém* (a, b) *splňující počáteční podmínku* $x(t_0) = x_0$*.*

Důkaz. Rovnice (4) je ekvivalentní rovnici (1), kde $f(x,t) = A(t)\cdot x + g(t)$. Můžeme psát

$$|f(x,t) - f(y,t)| = |A(t)x - A(t)y| \le \|A(t)\||x-y|.$$

Funkce $A(t)$ je omezená na kompaktních intervalech, tedy f je lipschitzovská. Tedy pro každou počáteční podmínku existuje právě jedno maximální řešení. Dokážeme, že toto řešení je definované na celém (a,b).

konec 5. přednášky (21.3.2025)

Předpokládejme, že řešení není definované na celém (a,b). Potom existují $\alpha,\beta \in (a,b)$ takové, že řešení je definováno na (α,β). Toto řešení musí opustit každý kompakt, tedy mimo jiné i $K = [t_0,\beta] \times \overline{B(0,R)}$, kde R je dostatečně velké. Řešení x splňuje

$$|x(t)| \le |x(t_0)| \int_{t_0}^{t} \|A(s)\||x(s)| + |g(s)| ds \overset{\substack{\|A(s)\|\le L \\ |g(s)|\le \tilde{C}}}{\le} C + \int_{t_0}^{t} L|x(s)|C|ds \le$$

Z Gronwallova lemmatu dostaneme

$$\le \tilde{C} + C(\beta - t_0) + \int_{t_0}^{t} L|x(s)|ds \implies |x(t)| \le \underbrace{[\tilde{C} + C(\beta - t_0)e^{L(\beta-t_0)}]}_{R}.$$

Došli jsme ke sporu s Větou 3.5, neboť řešení x nemůže opustit kompakt K. $\square$

Důležitá poznámka: řešení existuje globálně na oboru spojitosti $A(t), g(t)$. Ve skutečnosti předchozí věta i pro nelineární rovnice $x' = f(x,t)$ se sublineární pravou stranou, tj. pokud $|f(x,t)| \le a(t)|x| + g(t)$, kde $a(\cdot), g(\cdot)$ jsou spojité.

Definice 5.5. *Homogenní rovnicí* rozumíme rovnici (4) pro $g(t) \equiv 0$, tj.

$$x' = A(t)x, x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

Použijeme znalosti lineární algebry k tomu, abychom mohli formalizovat postup řešení lineárních ODR.

Věta 5.6. *Množina $\mathcal{R}_H$ řešení homogenní rovnice* (5) *bez zadané počáteční podmínky tvoří n-dimenzionální podprostor $C^1((a,b),\mathbb{R}^n)$.*

Důkaz. Jádro lineárního zobrazení $Lx := x' - Ax$ je vektorový prostor. Dokážeme, že má dimenzi n. Nechť $i = 1,\dots,n$ a $x(t_0) = e_i$, pro tuto počáteční podmínku dostaneme řešení x^i. Potom $\{x^1,\dots,x^n\}$ tvoří bázi prostoru všech řešení. Skutečně, tyto vektory jsou lineárně nezávislé, mějme lineární kombinaci $c_1x^1+\dots+c_nx^n = 0$, speciálně v čase t_0 máme $c_1e^1+\dots+c_nx^n$, což implikuje, že $c_i = 0$ pro každé i. Navíc vezmeme libovolné řešení $z' = A(t)z$, opět zkoumejme stav v čase t_0. Máme $z(t_0) = d_1e^1 + \dots d_ne^n$ pro vhodná $d_1,\dots,d_n$. Definujme $y(t) := d_1x^1(t) + \dots + d_nx^n(t)$, tedy y řeší rovnici $y' = Ay$ a $y(t_0) = z(t_0)$, z čehož díky jednoznačnosti řešení dostáváme $y = z$. Tudíž jsme nalezli n-prvkovou bázi, tedy prostor $\mathcal{R}_H$ má dimenzi n. $\square$

Definice 5.7. *Fundamentální systémem* pro (5) rozumíme libovolnou bázi $\mathcal{R}_H$. Matice, jejíž sloupce tvoří prvky libovolného fundamentálního systému, nazýváme *fundamentální maticí* pro (5).

Uvedeme si několik poznámek k definici fundamentální matice. Je-li $\Phi(t)$ nějaká fundamentální matice, pak

- $\Phi(t)$ splňuje "maticový tvar (5)", tedy $\Phi'(t) = A\Phi(t)$.
- $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (a, b)$.
- Obecné řešení (5) má tvar $\Phi(t)c$, kde $c \in \mathbb{R}^n$.
- $\tilde{\Phi}(t) := \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ je také fundamentální matice, která navíc splňuje $\tilde{\Phi}(t_0) = I$.

Věta 5.8 (Variace konstant)**.** *Nechť* $\Phi(t)$ *je libovolná fundamentální matice pro* (5)*. Potom řešení nehomogenní rovnice* (4) *lze napsat ve tvaru*

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)g(s)ds$$

pro $t \in (a, b)$

Důkaz. Zderivováním dostaneme $x' = A(t)x + g(t)$, dále stačí ověřit počáteční podmínku dosazením. □

Definice 5.9. *Wronského determinant* (Wronskián) rovnice (5) je reálná funkce $w(t) := \det(\Phi(t))$, kde Φ je libovolná fundamentální matice příslušné rovnice.

Věta 5.10 (Liouvilleova formule)**.** *Nechť* $\Phi(t)$ *je maticové řešení* (5) *a nechť* $w(t) = \det\Phi(t)$*. Potom*

$$w(t) = w(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds\right),$$

kde $\operatorname{tr} A$ *je stopa matice* A*.*

Důkaz. Dokazovaná rovnost je ekvivalentní s

$$w'(t) = w(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)ds\right)\operatorname{tr} A(t)$$

a tedy

$$w'(t) = \operatorname{tr} A(t)w(t), w(t_0) = w(t_0)$$

Dále

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\Phi(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\sigma}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\Phi_{1,\sigma(1)}(t)\dots\Phi_{n,\sigma(n)}(t) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\overbrace{\Phi\dots\Phi}^{\Phi' \text{ je v } k\text{-tém řádku}} = \sum_{k=1}^{n}\det D_k,$$

kde D_k je matice Φ se zderivovaným k-tým řádkem.

konec 6. přednášky (28.3.2025)

Dále si uvědomíme, že $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, přičemž násobení maticí zleva provádí řádkové úpravy na matici $\Phi(t)$. Konkrétně $\varphi_k^{j\prime}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ki}(t)\varphi_i^j(t)$.

Platí $\det D_k = A_{kk}(t) \det \Phi(t)$ (vlastnosti determinantu). Z toho dostáváme, že $w'(t) = \det \Phi(t) \sum_{k=1}^n A_{kk}(t) = w(t) = \operatorname{tr} A(t)$. □

Pokud $\operatorname{tr} A(t) > 0$, potom wronskián roste, $= 0$ množina možných hodnot řešení zachovává objem a pro $\operatorname{tr} A(t) < 0$ v průběhu času objem klesá.

Příklad 5.11. Řešme rovnici

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dostáváme $x' = 2x, y' = -2y$, tedy $x = x(0)e^{2t}, y = y(0)e^{-2t}$. Nechť $x(0), y(0) \in [0, 1]$. Potom pro fixní $t_1 > 0$ dostáváme $x(t_1) \in [0, e^{2t_1}], y(t_1) \in [0, e^{-2t_1}]$. Obsah tohoto obdélníku je $e^{2t_1}e^{-2t_1} = 1$. Tedy, obsah je konstantní, což odpovídá pozorování z věty, neboť stopa matice ze zadání je nulová.

Příklad 5.12. Mějme rovnici $x' = f(t, x)$. Ukážeme si, že roli stopy matice z předchozího příkladu tu hraje divergence f v proměnné x.

6 Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Definice 6.1. *Lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty* a s maticí $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je rovnice

$$x' = Ax. \tag{6}$$

Myšlenkou studia těchto rovnic je analogie s rovnicí $x' = ax$ pro $a \in \mathbb{R}$, kde řešením je $x(t) = x_0 e^{at}$. Ukážeme, že rovnice (6) má řešení $x(t) = e^{At}x_0$.

Definice 6.2. *Maticovou exponenciálu* definujeme předpisem

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

s konvencí $A^0 = I$.

Řada s definice maticové exponenciály je dobře definovaná, neboť $\|\frac{1}{k!}A^k\| \leq \frac{1}{k!}\|A\|^k$, přičemž $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c^k = e^c$ konverguje pro každé $c \in \mathbb{R}$. Navíc z tohoto odhadu dostáváme $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

Příklad 6.3. Nechť $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Potom

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{2^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{1^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Věta 6.4. *Nechť $U(t) = e^{tA}$. Pak $U(t)$ je fundamentální matice rovnice* (6) *a platí $U(0) = I$.*

Důkaz. Řada konverguje pro všechny matice, tedy i pro matici tA, což znamená, že U je dobře definovaná. Platí

$$[U(t)]_{ij} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [A^k]_{ij} t^k.$$

Toto je mocninná řada s poloměrem konvergence ∞, tedy ji můžeme derivovat člen po členu (nultý člen se zderivuje na nulu).

$$U'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{k-1} = Ae^{tA} = AU(t).$$

Vytknutí A můžeme provést, neboť operátor násobení maticí A je spojitý.

Závěr ohledně $U(0)$ plyne z toho, že pro $t = 0$ je první člen sumy roven jednotkové matici a všechny ostatní jsou nulové. □

Z obecného tvaru řešení dostáváme, že $x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$, přičemž $t_0 = 0$ a tedy $U(0) = U^{-1}(0) = I$. Z toho již plyne $x(t) = e^{tA}x_0$.

Věta 6.5 (Vlastnosti maticové exponenciály)**.** *Platí následující vlastnosti maticové exponenciály*

(i) $e^{aI} = e^a I$ *pro* $a \in \mathbb{R}$*;*

(ii) pokud $AB = BA$*, pak* $e^{A+B} = e^A e^B$*;*

(iii) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1} e^A C$*;*

(iv) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$*, speciálně* e^A *je vždy regulární.*

Důkaz. Budeme dokazovat postupně.

(i) Dosazením dostáváme

$$e^{aI} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{k!} I = I \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k!} I e^a.$$

(ii) Nejprve ukážeme, že $Be^{tA} = e^{tA}B$. To plyne z toho, že

$$Be^{tA} = B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} B \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} B = e^{tA} B.$$

Potom z definice $U(t) = e^{tA}e^{tB}$ a $U'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A + B)U(t)$. Tedy $U(t)$ splňuje rovnici $x'(t) = (A+B)x(t)$, kterou také splňuje $\tilde{U}(t) = e^{(A+B)t}$. Z jednoznačnosti řešení této rovnice dostáváme $e^A e^B = e^{A+B}$.

(iii) Z definice rozepíšeme

$$e^{C^{-1}AC} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (C^{-1}AC)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} C^{-1} A^k C =$$

$$C^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k C = C^{-1} e^A C.$$

(iv) Okamžitě plyne z (ii), neboť $e^A e^{-A} = e^0 = I$

$\square$

Důsledek 6.6 (Variace konstant pro (6))**.** *Nechť* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$*,* $g(t) : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá,* $t_0 \in (a,b)$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *jsou dána. Potom řešení rovnice*

$$x' = Ax + g(t), x(t_0) = x_0$$

má tvar

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} g(s) ds.$$

Další otázka, kterou se budeme zabývat je hledání maticové exponenciály. K tomu použijeme takzvaný Jordanův kanonický tvar matice.

Věta 6.7. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, J její Jordanův kanonický tvar, $A = VJV^{-1}$ a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ je diagonála J. Potom $e^{tA} = Ve^{tJ}V^{-1}$, kde matici e^{tJ} definujeme jako diag$(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$, přičemž $P(t)$ je blokově diagonální matice se stejně velkými a stejně uspořádanými bloky jako J a blok velikosti k matice $P(t)$ je roven*

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(k-2)!}t^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Důsledek 6.8. *Buď $a = \max\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ a m velikost největší Jordanovy buňky příslušné k vlastnímu číslu $\Re\lambda = a$. Pak existuje $M > 0$, že $\|e^{tA}\| \leq Mt^{m-1}e^{at}$ pro všechna $t \geq 0$. Speciálně, pro všechna $\tilde{a} > a$ existuje $\tilde{M} > 0$ takové, že $\|e^{tA}\| \leq \tilde{M}e^{t\tilde{a}}$.*

konec 7. přednášky (4.4.2025)

Definice 6.9. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a její spektrum $\sigma(A)$ definujeme $\sigma_-(A) = \sigma(A) \cap \{\Re < 0\}$, $\sigma_0(A) = \sigma(A) \cap \{\Re = 0\}$, $\sigma_+(A) = \sigma(A) \cap \{\Re > 0\}$. Příslušné podprostory generované příslušnými (zobecněnými) vlastními vektory značíme $X_-(A), X_0(A), X_+(A)$ (nazýváme je *stabilní, centrální* a *nestabilní* podprostor).

Zřejmě $\mathbb{R}^n = X_+(A) \oplus X_-(A) \oplus X_0(A)$. Tyto prostory jsou invariantní vzhledem k A a též vzhledem k e^{tA}.

Věta 6.10 (Asymptotické chování podprostorů)**.** *Nechť A je daná matice. Potom existují kladná α, β, M a c taková, že platí:*

1. *Pokud $x_0 \in X_-(A)$, pak $|e^{tA}x_0| \leq ce^{-\alpha t}|x_0|$ pro každé $t \geq 0$.*
2. *Pokud $x_0 \in X_+(A)$, pak $|e^{tA}x_0| \leq ce^{\beta t}|x_0|$ pro každé $t \leq 0$.*
3. *Pokud $x_0 \in X_0(A)$, pak $|e^{tA}x_0| \leq c(1 + |t|)^M|x_0|$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Nejdříve nechť $x_0 \in X_-(A)$. Potom $x_0 = \sum_{i=1}^k a_i v_i$, kde v_i jsou zobecněné vlastní vektory příslušné $\lambda_i \in \sigma_-(A)$. Dále máme, že $e^{tA}x_0 = Ve^{tJ}V^{-1}x_0$. Spočteme $V^{-1}x_0$. Jestliže v je sloupec matice V, potom $V^{-1}v$ je jeden ze sloupců jednotkové matice, tedy má tvar $(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^T$. Tedy $V^{-1}x_0$ má nenulové hodnoty jen v řádcích příslušných $\Re\lambda < 0$. Můžeme odhadovat normu

$$\|e^{tA}x_0\| \leq \|V\| \|e^{tJ}\text{: řádky s } e^{-at}\| \|V^{-1}x_0\| \leq Ce^{-\alpha t}\|x_0\|.$$

Zde jsme využili faktu, že “polynom” $e^{-\lambda t}t^k$ lze odhadnout $e^{-\lambda t}t^k \leq e^{(-\lambda+\varepsilon)t}c$ pro vhodná c a ε.

Důkaz ostatních implikací je podobný. $\square$

V předchozí větě platí i opačná implikace, a to ve smyslu, že uvedené vlastnosti charakterizují dané podprostory.

7 Stabilita

Lemma 4.2 nám teoreticky poskytuje spojitost řešící funkce v proměnné x_0, pro větší t však kvůli exponenciálnímu růstu nemá význam. Budeme proto zkoumat okolnosti, za nichž existují odhady, které se nezhoršují pro $t \in \infty$.

Definice 7.1. Nechť $f = f(x,t)$ je spojitá v otevřené $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ a navíc lokálně lipschitzovská vůči x. Nechť $\Omega \supset \{0\} \times I$ kde $I = (\tau, \infty)$ a nechť $f(0,t) = 0$ pro všechna $t \in I$. Řekneme, že nulové řešení rovnice $x' = f(t,x)$ (1) je

(i) *stabilní*, jestliže pro všechna $t_0 \in I$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|x_0| < \delta$ implikuje, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno a splňuje $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pro $t \geq t_0$;

(ii) *nestabilní*, jestliže není stabilní;

(iii) *lokální atraktor*, jestliže $\forall t_0 \in I$ existuje $\eta > 0$ tak, že $|x_0| < \eta$ implikuj, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno pro všechna $t \geq t_0$ a navíc $\varphi(t, t_0, x_0) \to 0$ pro $t \to +\infty$;

(iv) *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní a navíc lokální atraktor;

(v) *uniformně stabilní*, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $t_0 \in I$ z $|x_0| < \delta$ plyne $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno a splňuje $|\varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pro $t \geq t_0$;

(vi) *uniformě asymptoticky stabilní*, jestliže je uniformně stabilní a navíc existuje $\eta < 0$ takové, že $\forall \varepsilon > 0$ existuje $T > 0$ takové, že pro všechna $t_0 \in I$ z $|x_0| < \eta$ plyne, že $\varphi(t, t_0, x_0)$ je definováno pro všechna $t \geq t_0$ a $|\varphi(t, t_0, x_0)| \leq \varepsilon|$ pro $t \geq t_0 + T$.

Pojem asymptotické stability zavádíme proto, že lokální atraktor nutně nemusí implikovat stabilitu. Konstrukci takového řešení můžeme nahlédnout pomocí tzv. Vinogradovova systému. V případě autonomní rovnice splývají pojmy (asymptotické) stability a uniformní (asymptotické) stability, neboť můžeme psát $\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, 0, x_0)$.

Obecněji řešeno, řešení $\tilde{x}(t)$ rovnice $x' = f(x,t)$ se nazve stabilní (resp. uniformně stabilní atd.), jestliže má analogickou vlastnost nulové řešení rovnice $u' = g(u,t)$ kde $g(u,t) = f(\tilde{x}(t) + u, t) - f(\tilde{x}(t), t)$.

V případě řešení lineární rovnice (4), tj. $x' = A(t)x + g(t)$ je stabilita libovolného řešení příslušné homogenní rovnice (5).

Věta 7.2. *Je dána rovnice $x' = A(t)x$, kde $A(t)$ je spojitá v $I = (\tau, \infty)$. Nechť $\Phi(t)$ je (libovolná) fundamentální matice. Potom nulové řešení je*

1. *stabilní, právě když pro $\forall t_0 \in I$ je $\|\Phi(t)\|$ omezená v $[t_0, \infty)$;*

2. *asymptoticky stabilní, právě když $\|\Phi(t)\| \to 0$ pro $t \to \infty$;*

3. *uniformně stabilní, právě když existuje $c > 0$ takové, že pro všechna $s < t \in I$ je $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq c$.*

4. *uniformně asymptoticky stabilní, právě když existují kladná α a c taková, že pro všechna $s < t \in I$ je $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\| \leq ce^{-\alpha(t-s)}$.*

Věta 7.3. *Nechť A je konstantní matice. Potom nulové řešení rovnice $x' = Ax$ je*

1. *(uniformně) stabilní, právě když $\Re\lambda \leq 0$ pro všechna vlastní čísla $\lambda \in \sigma(A)$, přičemž $\Re\lambda = 0$ pouze pro polojednoduchá vlastní čísla (tedy příslušné Jordanovy buňky mají velikost 1).*

2. *(uniformě) asymptoticky stabilní, právě když $\Re\lambda \leq 0$ pro všechna vlastní čísla $\lambda \in \sigma(A)$.*

Důkaz. Plyne ihned z tvaru maticové exponenciály. □

Matice A splňující $\Re\lambda < 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$ se nazývá *Hurwitzowská.*

Lemma 7.4. *Je dána rovnice $x' = Ax + r(x,t)$. Nechť existují kladná α, c tak, že $\|e^{tA}\| \leq ce^{-t\alpha}$ pro $t \geq 0$. Nechť dále $r(x,t) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a $|r(x,t)| \leq \gamma|x|$ pro všechna x, y kde $\gamma < \frac{\alpha}{c}$. Pak každé řešení splňuje*

$$|x(t)| \leq c|x(t_0)| \exp(-\beta(t - t_0))$$

pro $t \geq t_0$, kde $\beta = \alpha - c\gamma > 0$.

Důkaz. Nechť x řeší $x' = Ax + r(x,t)$ na $(0, +\infty)$. Pak x řeší $x' = Ax + g(t)$, kde $g(t) := r(x(t), t)$. Z variace konstant (Důsledek 6.6) dostáváme, že

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}g(s)ds.$$

Pro $t > t_0$ dostaneme

$$\|x(t)\| \leq ce^{-(t-t_0)\alpha}\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} ce^{-(t-s)\alpha}\gamma\|x(s)\|ds.$$

Jinými slovy,

$$\|x(t)\|e^{t\alpha} \leq ce^{t_0\alpha}\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} ce^{-(t-s)\alpha}\gamma\|x(s)\|ds.$$

Z Gronwallova lemmatu (Lemma 4.1) dostáváme

$$e^{t\alpha}\|x(t)\| \leq ce^{t_0\alpha}\|x_0\|e^{c\gamma(t-t_0}.$$

Po opětovném přenásobení exponenciálou nakonec máme

$$\|x(t)\| \leq c\|x_0\|e^{(t-t_0)(c\gamma-\alpha)} = ce^{-\beta(t-t_0)}\|x_0\|.$$

□

konec 8. přednášky (11.4.2025)