

# Obyčejné diferenciální rovnice (NMMA336)

Petr Velička \*

přednášející: doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D. †

LS 2024/25

---

\*petrvel@matfyz.cz

†bart@karlin.mff.cuni.cz

# 1 Lokální existence řešení

Diferenciální rovnice nás doprovází v každé oblasti lidského života. Neexistuje obecná teorie, která by nám umožnila vyřešit všechny diferenciální rovnice najednou. Musíme se proto omezit jen na část rovnic.

**Úmluva 1.1.** V této přednášce budeme studovat systém rovnic

$$x' = f(x, t) \quad (1)$$

za trvalého předpokladu  $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$  otevřená,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  spojitá.

**Definice 1.2.** Buď  $I$  otevřený interval. Funkci  $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazveme *řešením* diferenciální rovnice (1) v  $\Omega$ , jestliže pro všechna  $t \in I$  platí

- (i)  $(x(t), t) \in \Omega$ ,
- (ii) existuje vlastní  $x'(t)$ ,
- (iii)  $x'(t) = f(x(t), t)$ .

Takto definované řešení je nutně spojitě a má spojitou derivaci (je třídy  $C^1$ ), tzv. klasické řešení. Dále si poznamenejme, že platí tzv. princip nalepování: Pokud máme  $x(t)$  řešení na  $(a, t_0)$  a na  $(t_0, b)$ , pak už je řešením na celém  $(a, b)$ . To plyne z toho, že  $x'_-(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} x'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(x(t), t) = f(x(t_0), t_0)$ , přičemž tatáž rovnost platí i pro derivaci zprava.

**Lemma 1.3.** *Nechť  $I$  je otevřený interval,  $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  spojitá splňující  $(x(t), t) \in \Omega$  pro každé  $t \in I$  a nechť  $t_0 \in I$ . Potom je ekvivalentní*

- (i)  $x$  je řešení (1) splňující  $x(t_0) = x_0$ ,
- (ii) pro každé  $t \in I$  platí  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$ .

*Důkaz.* Víme, že platí  $x'(s) = f(x(s), s)$  pro všechna  $s \in I$ , což je spojitá funkce, kterou můžeme zintegrovat na  $[t_0, t]$ . Potom z Newtonova-Leibnizova vzorce máme  $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$ . Tedy  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$ .

Pro důkaz opačné strany si uvědomíme, že pro každé  $t \in I$  je pravá strana diferencovatelná, tedy  $x'(t) = f(x(t), t)$  a po dosazení  $t = t_0$  dostáváme  $x(t_0) = x_0$ .  $\square$

Teď si zadefinujeme několik pojmů, které charakterizují množiny funkcí, které se chovají jistým způsobem podobně nebo stejně.

**Definice 1.4.** Řekneme, že funkce množiny  $M \subset C(K, \mathbb{R}^n)$  jsou

1. *stejně spojitě*, jestliže pro každé  $x \in K$  a každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že  $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$  pro všechna  $y \in (x - \delta, x + \delta)$  a všechny  $f \in M$ .

2. *stejně omezené*, jestliže existuje  $C > 0$  takové, že  $\|f\| \leq C$  pro všechna  $f \in M$ .

**Věta 1.5** (Arzela-Ascoli). *Nechť funkce  $x_n(t)$  jsou stejně omezené a stejně spojitě na  $[0, T]$ . Potom z nich lze vybrat stejnoměrně konvergující posloupnost. (bez důkazu)*

Následující věta nám říká, že na nějakém okolí libovolného bodu existuje řešení zkoumané diferenciální rovnice.

**Věta 1.6** (Peano). *Nechť  $(x_0, t_0) \in \Omega$ . Pak existuje  $\delta > 0$  a funkce  $x(t) : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , která je řešením (1) a splňuje  $x(t_0) = x_0$ .*

K důkazu této věty budeme potřebovat pomocné lemma:

**Lemma 1.7.** *Pokud  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$  a  $f$  je omezená na  $\Omega$ , pak pro každé  $T > 0$  existuje řešení (1) na  $(t_0 - T, t_0 + T)$  splňující  $x(t_0) = x_0$ .*

*Důkaz.* Řešme “porušenou” úlohu  $P_\lambda: x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \lambda), s) ds$  pro  $t > t_0$  a  $x(t) = x_0$  pro  $t \in [t_0 - \lambda, t_0]$ . Na  $I_1 := (t_0, t_0 + \lambda]$  definujeme  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \lambda), s) ds$ . Na  $I_2 := (t_0 + \lambda, t_0 + 2\lambda]$  definujeme  $x(t)$  obdobně a indukci pokračujeme dokud  $t_0 + k\lambda$  nebude větší než  $T$ . Tímto je “porušená” úloha vyřešena na  $[t_0 - \lambda, t_0 + T]$ .

Položme  $\lambda = \frac{1}{n}$  pro  $n = 1, 2, \dots$ . Pišme dále jen  $x_n$  namísto  $x_{1/n}$ , tedy řešení úloh  $P_{\frac{1}{n}}$  tvoří posloupnost funkcí. Ukážeme, že jsou stejně spojitě a stejně omezené. Stejná omezenost plyne z toho, že  $\|x_n(t)\| = \|x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s) ds\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|f(x(s - \frac{1}{n}), s)\| ds$ . Ale funkce  $f$  je omezená, tedy máme  $\|x_n(t)\| \leq \|x_0\| + (T - t_0) \cdot K$ , kde  $K$  je příslušná konstanta omezenosti  $f$ . Stejnou spojitost máme z odhadu  $\|x_n(t) - x_n(r)\| = \|\int_r^t f(x(s - \frac{1}{n}), s) ds\| \leq |t - r| \cdot K$ . V poslední nerovnosti jsme odhadli integrál součinem délky intervalu a konstantou omezenosti funkce  $f$ . Stačí položit  $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ , potom  $\|x_n(t) - x_n(r)\| < \delta K = \varepsilon$ .

Tedy dle Věty 1.5 můžeme z posloupnosti  $x_n$  vybrat stejnoměrně konvergentní podposloupnost  $x_{n_k}$ . Zbývá dokázat, že její limita řeší naši rovnici.

*konec 1. přednášky (21.2.2025)*

Zřejmě pro  $k \rightarrow \infty$  platí  $x_{n_k} \rightarrow x(t)$  a pokud  $\int_{t_0}^t f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) ds$  konverguje k  $\int_{t_0}^t f(x(s - \frac{1}{n}), s) ds$ , máme hotovo. Tato vlastnost plyne z toho, že  $\|\int_{t_0}^t f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s), s) ds\| \leq \int_{t_0}^t \|f(x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s - \frac{1}{n_k}), s)\| + \|f(x(s - \frac{1}{n_k}), s) - f(x(s), s)\| ds$ .

Jelikož  $f$  je spojitá, musí být stejnoměrně spojitá na kompaktní množině  $[t_0, t_0 + T] \times \overline{B(0, r) \cap \Omega}$ , jinými slovy platí, že pro  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta$  takové, že pro každé dva body  $x, y$  takové, že  $\|x - y\| < \delta$  máme, že  $f(x, s) - f(y, \hat{s}) < \varepsilon$ .

Ze stejnoměrné konvergence  $x_{n_k}$  máme, že pro  $\delta > 0$  existuje  $k_0$  takové, že pro všechna  $k \geq k_0$  platí  $\|x_{n_k}(s - \frac{1}{n_k}) - x(s - \frac{1}{n_k})\| < \delta$ .

Jelikož  $x$  je spojitá, na kompaktním intervalu  $[t_0, t_0 + T]$  je také stejnoměrně spojitá. Potom pro  $\delta > 0$  existuje  $k_1$  takové, že pro všechna  $k \geq k_1$  platí  $\|x(s - \frac{1}{n_k}) - x(s)\| < \delta$ .

Potom pro všechna  $k \geq \max\{k_0, k_1\}$  platí, že náš integrál je menší nebo roven  $\int_{t_0}^t \varepsilon + \varepsilon ds \leq T \cdot 2\varepsilon$ , tedy jsme opravdu našli požadované řešení.

Existence řešení na  $[t_0 - T, t_0]$  se ukáže podobně.  $\square$

*Důkaz Věty 1.6.* Uvažujme dvě koule kolem bodu  $(x_0, t_0)$  takové, že  $K_1 \subset K_2 \subset$

$$\Omega. \text{ Definujeme } \tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t) & \text{v } K_1, \\ \text{spojitě v } K_2 \setminus K_1 & \\ 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus K_2 \end{cases}.$$

Z Lemmatu 1.7 máme, že rovnice  $x' = \tilde{f}(x, t)$  má řešení  $x$  splňující počáteční podmínku  $x(t_0) = x_0$ . Nazveme toto řešení  $\tilde{x}$ . Potom ze spojitosti  $\tilde{x}$ . Tedy existuje  $\delta > 0$  takové, že graf  $\tilde{x}$  na  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  leží v  $K_1$ . Restrikce  $\tilde{x}$  na tento interval nám tedy dává řešení původní rovnice.  $\square$

## 2 Jednoznačnost řešení

V této kapitole se budeme věnovat otázce jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic. V praxi to často požadujeme, například proto, aby nějaká simulace byla deterministická.

**Definice 2.1.** Řekneme, že rovnice (1) má v  $\Omega$  vlastnost *globální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení  $(x, I), (y, J)$  splňující  $x(t_0) = y(t_0)$  pro nějaké  $t_0 \in I \cup J$ , potom  $x(t) = y(t)$  pro všechna  $t \in I \cup J$ . Řekneme, že rovnice (1) má v  $\Omega$  vlastnost *lokální jednoznačnosti*, jestliže pro libovolná řešení  $(x, I), (y, J)$  splňující  $x(t_0) = y(t_0)$  pro nějaké  $t_0 \in I \cup J$ , potom existuje  $\delta$  takové, že  $x(t) = y(t)$  pro všechna  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ .

**Věta 2.2.** *Rovnice (1) má v  $\Omega$  vlastnost globální jednoznačnosti právě tehdy, když má vlastnost lokální jednoznačnosti.*

*Důkaz.* Implikace směrem doprava je triviální (funkce, které se rovnají na celé množině se nutně musí rovnat i na nějakém okolí zkoumaného bodu).

Pro důkaz opačné implikace necht' máme dvě řešení  $(x, I), (y, J)$  splňující  $x(t_0) = y(t_0) = x_0$  pro nějaké  $t_0 \in I \cap J$ . Bez újmy na obecnosti necht'  $I \cup J = (a, b)$ . Položme  $M = \{t : x(t) = y(t)\}$ . Tato množina je díky předpokladu neprázdná, necht'  $c := \sup M$ .

Pro spor předpokládejme, že  $c < b$ . Potom platí  $x(c) = \lim_{t \rightarrow c^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow c^-} y(t)$ , což se díky spojitosti  $y$  rovná  $y(c)$ . Tedy  $c$  je maximum  $M$ . Ale díky lokální jednoznačnosti existuje okolí  $(c, x(c))$ , na kterém platí  $x = y$ . Tedy  $x(c + \delta) = y(c + \delta)$  pro nějaké  $\delta > 0$ , což je spor s tím, že  $c = \sup M$ .  $\square$

**Definice 2.3.** Funkce  $f$  se nazývá *lokálně lipschitzovská vzhledem k  $x$  v  $\Omega$* , jestliže pro každé  $(x_0, t_0) \in \Omega$  existují  $L$  a  $\delta > 0$  takové, že

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|$$

pro všechna  $(x, t), (y, t) \in U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ .

**Věta 2.4.** *Necht'  $f$  je lokálně lipschitzovská vzhledem k  $x$  v  $\Omega$ . Potom rovnice (1) má v  $\Omega$  vlastnost lokální jednoznačnosti.*

*Důkaz.* Volme  $(x_0, t_0) \in \Omega$  a dvě řešení  $(x, I), (y, J)$  taková, že  $y(t_0) = x(t_0) = x_0$ . Vezmeme  $\delta_1 > 0$  tak, aby  $f$  byla lipschitzovská na  $\delta_1$ -okolí  $(x_0, t_0)$ . Necht'  $\delta \leq \frac{1}{2L}$  je takové, že navíc  $\delta < \delta_1$  a  $t$  takové, aby  $(x(t), t), (y(t), t) \in U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ . Potom platí

$$\|x(t) - y(t)\| = \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds - \left( x_0 + \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds \right) \right\| \leq$$

$$\left| \int_{t_0}^t \|f(x(s), s) - f(y(s), s)\| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\| ds \right| \leq L \cdot \gamma \cdot \delta \leq \frac{\gamma}{2}$$

pro  $\gamma := \sup \|x(s) - y(s)\|$ . To platí pro všechna  $t$ , tedy  $\gamma = \sup \|x(t) - y(t)\| \leq \frac{\gamma}{2}$ , z čehož plyne  $\gamma = 0$ , což implikuje rovnost  $x(t) = y(t)$ .  $\square$

Zavedeme značení  $f \in C_x^1(\Omega)$ , jestliže  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  existují a jsou spojité v  $\Omega$  pro každé  $i$ .

**Lemma 2.5.** *Nechť  $f \in C_x^1(\Omega)$ . Potom  $f$  je lokálně lipschitzovská vzhledem k  $x$  v  $\Omega$ .*

*Důkaz.* Mějme  $(x_0, t_0) \in \Omega$ . Nechť  $\delta > 0$  je takové, že množina

$$M = \overline{U(x_0, \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)}$$

je podmnožinou  $\Omega$ . Z kompaktnosti  $M$  máme, že parciální derivace  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  jsou omezené konstantou  $K$ .

Dále mějme dva body  $(x, t), (y, t) \in M$ . Potom  $|f(x, t) - f(y, t)| = |f(x + 0(y - x), t) - f(x + 1(y - x)t)| = |[f(x + s(y - x), t)]_0^1| = |\int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + s(y - x), t) ds|$ . Pro derivaci  $f$  platí  $\frac{d}{ds} f(x + s(y - x), t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + s(y - x), t)(y_i - x_i)$ . Z toho máme, že

$$\left| \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + s(y - x), t) ds \right| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n K |y_i - x_i| ds = \sum_{i=1}^n K \max_i |y_i - x_i| =$$

$$nK \max |y_i - x_i| \leq nK |y - x|,$$

kde poslední nerovnost plyne z faktu, že  $|y - x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2}$ .

Tedy  $f$  je lokálně Lipschitzovská s konstantou  $n \cdot K$ . □

*Rule of thumb (just for fun):* platí  $f$  spojitá  $\Rightarrow$  existuje řešení,  $f \in C^1 \Rightarrow$  řešení je určeno jednoznačně.

*konec 2. přednášky (28.2.2025)*

### 3 Maximální řešení

V této kapitole se budeme věnovat otázce rozšíření řešení na co největší podmnožinu prostoru, v němž toto řešení hledáme. Bez újmy na obecnosti budeme dále předpokládat, že  $f$  je spojitá (ne nutně lipschitzovská) na  $\Omega$  (což znamená, že nutně nemusíme mít jednoznačnost řešení).

**Definice 3.1.** Řešení  $(\hat{x}, \hat{I})$  diferenciální rovnice (1) nazýváme *prodloužením* řešení  $(x, I)$ , jestliže  $\hat{I} \supset I$  a  $\hat{x}(t) = x(t)$  pro každé  $t \in I$ . Řešení  $(x, I)$  se nazve *maximální*, jestliže nemá žádné netriviální  $(\hat{I} \supsetneq I)$  prodloužení.

**Věta 3.2.** Každé řešení rovnice (1) má alespoň jedno maximální prodloužení.

*Důkaz.* Mějme řešení  $(x, I)$  takové, že  $I = (a, b)$ . Budeme induktivně prodloužovat za bod  $b$  (na druhou stranu se to pak udělá analogicky). Položme  $x_0 = x$ ,  $b_0 = b$ ,  $I_0 = I$ . V  $n$ -tém kroku dostaneme řešení  $(x_n, I_n)$ , kde  $I_n = (a, b_n)$ . Dále definujeme  $\omega_n = \sup\{z > b_n; (x_n, I_n) \text{ lze prodloužit na } (a, z)\}$ . Pokud příslušná množina je prázdná, jsme hotovi, neboť řešení již nejde prodloužit, tedy je maximální.

V opačném případě můžeme definovat  $b_{n+1} = \frac{b_n + \omega_n}{2}$  (pokud  $\omega_n < \infty$ ), případně  $b_{n+1} = b_n + 1$ . Tímto postupem získám rostoucí posloupnost  $b_n$ , která musí mít limitu. Označme tuto limitu  $\beta$ . Dále položíme  $\tilde{I} = (a, \beta)$ ,  $\tilde{x} = x_n(t)$ , pro všechna  $t \in \tilde{I}$  zvolím  $n$  tak, aby  $t \in I_n$ . Na volbě  $n$  nezávisí, neboť na příslušných intervalech jsou funkce  $x_n$  stejné.

Dokážeme, že takto definované řešení  $(\tilde{x}, \tilde{I})$  je maximální. Pro spor budeme předpokládat, že existuje rozšíření na  $(a, \hat{\beta})$  takové, že  $\hat{\beta}$ . Okamžitě vidíme, že  $\beta < \infty$ . Vezmeme  $n$  takové, aby  $\beta - b_n < \hat{\beta} - \beta$  a  $\beta - b_n < 1$  (existuje díky tomu, že  $b_n$  konvergují k  $\beta$ ). V tom případě  $(x_n, I_n)$  má prodloužení až do  $\hat{\beta}$ , tedy  $\omega_n \geq \hat{\beta}$ . Pak ale (pokud  $\omega_n = \infty$ )  $b_{n+1} = b_n + 1 > \beta$ , máme spor, případně pro  $\omega_n$  konečné máme  $b_{n+1} = \frac{b_n + \omega_n}{2} > \frac{2\beta - \hat{\beta} + \hat{\beta}}{2} = \beta$ , opět jsme došli ke sporu.  $\square$

V případě  $f$  lipschitzovské se důkaz dá výrazně zjednodušit. Budeme uvažovat všechna prodloužení řešení  $x$  (platí jednoznačnost), dostaneme lineárně uspořádanou množinu, potom díky Zornovu lemmatu existuje maximální prvek.

**Věta 3.3** (Picard). Nechť  $f \in C_x^1(\Omega)$ . Pak pro každé  $(x_0, t_0) \in \Omega$  existuje právě jedno maximální řešení  $x$  diferenciální rovnice (1) v  $\Omega$  splňující  $x(t_0) = x_0$ .

*Důkaz.* Plyne z Peanovy věty (Věta 1.6) a Věty 3.2.  $\square$

**Lemma 3.4.** Řešení  $(x, I)$  diferenciální rovnice (1) lze prodloužit za bod  $b$  právě tehdy, když platí všechny

- (i)  $b < \infty$ ;
- (ii) existuje  $\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) =: x_0 \in \mathbb{R}^n$ ;
- (iii)  $(x_0, b) \in \Omega$ .

*Důkaz.* Nutnost těchto podmínek plyne triviálně z podstaty prodloužení (cvičení). Dokážeme, že jde o podmínky postačující. Nechť tedy máme  $(x_0, b)$  jakou novou počáteční podmínku, dle Peanovy vety existuje řešení  $\hat{x}$  na  $(b - \delta, b + \delta)$

splňující tuto počáteční podmínku. Definujeme  $\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t < b \\ \tilde{x}(t), & t \geq b \end{cases}$ . Potom  $\hat{x}$  je řešení (díky principu nalepování) a navíc prodlužuje  $x$  za bod  $b$ , což jsme chtěli dokázat.  $\square$

Na závěr si uvedeme jednu důležitou větu, která nám poskytne představu o tom, jak vypadají maximální řešení diferenciálních rovnic.

**Věta 3.5** (Opuštění kompaktu). *Nechť  $K \subset \Omega$  je kompaktní, nechť  $(x, I)$  je maximální řešení rovnice (1) splňující  $(x(t_0), t_0) \in K$  pro nějaké  $t_0 \in I$ . Potom existují  $t_1 > t_0 > t_2$  taková, že  $(x(t_1), t_1) \notin K$  a  $(x(t_2), t_2) \notin K$ .*

*Důkaz.* Pro spor budeme předpokládat, že takové  $t_1$  neexistuje, chceme dojít ke sporu s maximalitou řešení. Mějme řešení  $x$  na  $(a, b)$  a  $(x(t), t) \in K$  pro všechna  $t \in [t_0, b)$ . Ukážeme, že toto řešení můžeme prodloužit za  $b$ . Využijeme k tomu Lemma 3.4.

Zřejmě platí  $b < \infty$  (díky kompaktnosti  $K$ ). Dále dokážeme, že existuje  $\lim_{t \rightarrow b^-} x(t)$  pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Mějme  $s, t \in (t_0, b)$ . Dále díky Lagrangeově větě o střední hodnotě máme

$$\|x(s) - x(t)\| \leq \|x'(\xi)\| |s - t| = \|f(x(\xi), \xi)\| |s - t| \leq M |s - t|,$$

kde poslední nerovnost plyne z toho, že funkce  $f$  je omezená na kompaktu  $K$  konstantou  $M$ . Nakonec  $(x_0, b) = \lim_{t \rightarrow b^-} (x(t), t)$ , tedy z uzavřenosti  $K$  máme, že  $(x_0, b) \in K \subset \Omega$ .

Zjistili jsme, že řešení lze prodloužit za bod  $b$ , což je spor s jeho maximalitou. Důkaz pro  $t_2$  se udělá obdobně.  $\square$

## 4 Závislost na počáteční podmínce

**Lemma 4.1** (Gronwall). *Nechť  $w(t), g(t)$  jsou nezáporné a spojité na nějakém intervalu  $I$  a nechť  $t_0 \in I, K \geq 0$ . Nechť pro každé  $t \in I$  platí*

$$w(t) \leq K + \left| \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds \right|.$$

*Potom pro každé  $t \in I$  platí*

$$w(t) \leq K \exp \left( \left| \int_{t_0}^t g(s)ds \right| \right).$$

*Důkaz.* Definujeme  $\Phi(t) := K + \int_{t_0}^t w(s)g(s)ds + \varepsilon$  pro  $t > t_0$ . Okamžitě z předpoklady vidíme, že  $w(t) \leq \Phi(t)$ . Zderivujeme funkci  $\Phi(t)$ , dostáváme  $\Phi'(t) = w(t)g(t) \leq \Phi(t)g(t)$  což po vydělení  $\Phi(t)$  (je nenulové díky přičtení  $\varepsilon$ ) nám dává  $\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq g(t)$ , což můžeme přintegrovat od  $t_0$  do  $t$ , čímž dostaneme  $\int_{t_0}^t \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} ds \leq \int_{t_0}^t g(s)ds$ . Po vyčíslení integrálů dostaneme  $\log(\Phi(t) - \Phi(t_0)) \leq \int_{t_0}^t g(s)ds$ . Je-li  $\exp$  je rostoucí funkce, můžeme psát  $\frac{\Phi(t)}{\Phi(t_0)} \leq \exp \left( \int_{t_0}^t g(s)ds \right)$ .

Nakonec dostáváme  $w(t) \leq \Phi(t) \leq (K + \varepsilon) \exp \left( \int_{t_0}^t g(s)ds \right)$ . Požadované tvrzení získáme posláním  $\varepsilon$  do 0.  $\square$

*konec 3. přednášky (7.3.2025)*

**Lemma 4.2.** *Nechť  $f$  je globálně  $L$ -lipschitzovská v  $\Omega$  vzhledem k  $x$ . Potom pro libovolná dvě řešení  $(x, I), (y, J)$  v  $\Omega$  a body  $t, t_0 \in I \cap J$  platí*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| \exp(L|t - t_0|).$$

*Důkaz.* Můžeme psát

$$\|x(t) - y(t)\| = \left\| x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), s)ds - \left( y(t_0) + \int_{t_0}^t f(y(s), s)ds \right) \right\| \leq$$

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^t |f(x(s), s) - f(y(s), s)| ds \right\| \leq$$

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^t L|x(s) - y(s)|ds \right\|.$$

Poté z Gronwallova lemmatu dostáváme, že

$$\|x(t) - y(t)\| \leq K e^{\left| \int_{t_0}^t L ds \right|} = K e^{|t - t_0|L},$$

kde funkci  $w(s)$  ze znění lemmatu odpovídá výraz  $\|x(s) - y(s)\|$ .  $\square$

Jednoduchým důsledkem tohoto lemmatu je mj. jednoznačnost řešení (stačí uvažovat řešení s  $x(t_0) = y(t_0)$ ).

**Definice 4.3.** Necht  $f$  je spojitá a lokálně lipschitzovská vzhledem k  $x$  v  $\Omega$ . Potom definujeme *řešící funkci*  $\varphi : G \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^n$  předpisem  $\varphi(t; t_0, x_0) := x(t)$ , kde  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  je řešení splňující počáteční podmínku  $x(t_0) = x_0$  a  $t \in I$ . Zde  $G$  je maximální možná, tj. obsahuje všechny trojice  $(t; t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2}$  pro něž výraz  $\varphi(t; t_0, x_0)$  má smysl.

Například, uvažujeme-li rovnici  $x'(t) = x(t)$ . Obecným řešením této rovnice je funkce  $x(t) = ce^t$ , vyřešením rovnice s počáteční podmínkou dostaneme řešící funkci  $\varphi(t; t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}$ .

**Věta 4.4.** Množina  $G$  z předchozí definice je otevřená a  $\varphi$  je spojitá na  $G$ .

*Důkaz.* Intermezzo: otevřenost  $G$  znamená, že pro každé  $(x_0, t_0) \in \Omega$  a  $t$  existuje  $r > 0$  takové, že pokud  $\|(y_0, s_0) - (t_0, x_0)\|$ , potom řešení  $y$  procházející bodem  $(y_0, s_0)$  je definované v bodech  $(t - r, t + r)$ , spojitost pak odpovídá tomu, že toto řešení bude po celou dobu “blízko” toho původního.

Bez újmy na obecnosti necht  $t_0 > t$ . Vezměme  $(t; t_0, x_0) \in G$ , buď  $x$  maximální řešení s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$ . Pak  $[t_0, t] \subset D_x$  (řešení je definováno na celém tomto intervalu). Vezměme  $\delta > 0$  tak malé, aby  $[t_0, t + 2\delta] \subset D_x$  (to můžeme, neboť  $D_x$  je otevřená) a zároveň  $K_\delta := \{(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : s \in [t_0 - \delta, t + \delta] \wedge |y(s) - x(s)| \leq \delta\} \subset \Omega$ . Takto definovaná množina  $K_\delta$  je kompaktní a tedy  $f$  je na  $K_\delta$  omezená konstantou  $c_0$  (spojitá funkce na kompaktu) díky čemuž z lokální lipschitzovskosti plyne globální  $L$ -lipschitzovskost vzhledem k  $x$ .

Dokážeme, že řešení “blízko” toho původního neopustí “rouru”  $K_\delta$ . Zvolme  $\varepsilon > 0$  takové, aby  $\varepsilon < \frac{\delta}{2(1+c_0)e^{L(t-t_0+2\delta)}}$ . Vezměme  $y_0, s_0$  tak, aby  $|s_0 - t_0| < \varepsilon$ ,  $|x_0 - y_0| < \varepsilon$ . Dále vezmeme  $y$  maximální řešení s podmínkou  $y(s_0) = y_0$ . Chceme dokázat, že  $y$  je definované aspoň na intervalu  $[s_0, t + \delta]$  a platí  $|y(s) - x(s)| \leq \delta$  pro všechna  $s \in [s_0, t + \delta]$ .

Můžeme psát

$$|y(s_0) - x(s_0)| \leq |y(s_0) - x(t_0)| + |x(t_0) - x(s_0)| \leq |y_0 - x_0| + |x'(t_0)| |t_0 - s_0| \leq (1 + c_0)\varepsilon,$$

kde  $\xi$  je konstanta z Lagrangeovy věty, která ve vícerozměrném prostoru platí pouze jako neostrá nerovnost.

Dále odhadujeme (použijeme Lemma 4.2)

$$|y(s) - x(s)| \leq |y(s_0) - x(s_0)| e^{L|s-s_0|} \leq (1 + c_0)\varepsilon e^{L|s-s_0|} \leq (1 + c_0)\varepsilon e^{L(t-t_0+2\delta)},$$

kde uvažujeme pouze body  $s$ , pro které existuje  $y(s)$  a  $y$  leží v  $K_\delta$  na  $[s_0, s]$ . Z volby  $\varepsilon$  dostáváme navíc

$$|y(s) - x(s)| \leq (1 + c_0)\varepsilon e^{L(t-t_0+2\delta)} < \frac{\delta}{2}. \quad (2)$$

Maximální řešení  $y$  opustí kompakt (Věta 3.5)  $K_\delta$  někde za časem  $s_0$ . Označme  $\gamma$  čas prvního opuštění (přesněji řečeno infimum všech časů, kdy to už není v tom kompaktu). Na intervalu  $[s_0, \gamma]$  platí odhad (2), tedy  $|y(\gamma) - x(\gamma)| < \frac{\delta}{2}$ ,

z čehož máme  $\gamma = t + \delta$ , to znamená, že kompakt nemůžeme opustit jinak než za časem  $t$ . Tím jsme dokázali otevřenost  $G$ .

Dokážeme spojitost  $\varphi$  na  $G$ . Vezměme dva body  $(t; t_0, x_0)$  a  $(s; s_0, y_0)$  jako minule a uvažujme rozdíl

$$\begin{aligned} |\varphi(t; t_0, x_0) - \varphi(s; s_0, y_0)| &\leq |\varphi(t; t_0, x_0) - \varphi(s; t_0, x_0)| + \\ |\varphi(s; t_0, x_0) - \varphi(s; s_0, y_0)| &\leq |x(t) - x(s)| + |x(s) - y(s)| \leq \\ c_0(t - s) + |x(s_0) - y(s_0)|e^{L|s-s_0|} &\leq c_0|t - s| + (1 + c_0)e^{L|s-s_0|}|x_0 - y_0|, \end{aligned}$$

čímž jsme ukázali lipschitzovskost, a tedy spojitost  $\varphi$  na  $G$ .  $\square$

Z hlediska praktických aplikací často uvažujeme rovnici (1) ve tvaru  $x' = f(x, t, \lambda)$  závislém na hodnotě parametru  $\lambda$ . Přidejme druhou rovnici  $\lambda' = 0$  a počáteční podmínky  $x(t_0) = 0$  a  $\lambda(t_0) = \lambda_0$ , čímž jsme závislost na parametru převedli na závislost na počáteční podmínce (v případě, že  $f$  je závislý na  $\lambda$  lipschitzovsky).

Označme pro účely následující věty  $\frac{\partial}{\partial w}$  derivaci ve směru  $w \in \mathbb{R}^n$  dle proměnné  $x_0$ .

**Věta 4.5.** *Nechť  $f \in C_x^1(\Omega)$ ,  $w \in \mathbb{R}^n$ . Potom  $\frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$  existuje v každém bodě  $G$ . Označíme-li  $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$  a  $u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(t, t_0, x_0)$ , pak funkce  $u$  je řešením rovnice ve variacích*

$$u' = \nabla_x f(x(t), t)u, u(t_0) = w. \quad (3)$$

*konec 4. přednášky (14.3.2025)*

*Důkaz.* Větu dokážeme za silnějšího předpokladu  $f \in C_x^2(\Omega)$ .

Vezmeme pevně bod  $(x_0, t_0)$  a víme, že tímto bodem prochází právě jedno maximální řešení, označíme ho  $x(t)$ . Dále označme  $A(t) = \nabla_x f(x(t), t)$ . Potom  $A(t)$  je matice  $n \times n$ . Vezmeme pevné  $w \in \mathbb{R}^n$  a označme  $u(t)$  maximální řešení počáteční úlohy (3).

Dle Věty 5.4 existuje právě jedno řešení a je definované na celém intervalu, kde je definovaná  $A(t)$ . Chceme dokázat, že  $u(t) = \frac{\partial}{\partial w}\varphi(t, t_0, x_0)$ . Z definice máme, že

$$\frac{\partial}{\partial w}\varphi(t, t_0, x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)).$$

Vezmeme  $t$  pevné tak, aby  $(t, t_0, x_0) \in G$ , tedy  $x(t)$  je dobře definované. Vezmeme dost malé  $h$  tak, aby  $\varphi(t, t_0, x_0 + hw)$  bylo definované. Položme  $y_h(t) := \varphi(t, t_0, x_0 + hw)$ .

Definujeme funkci  $\eta_h(t) = \frac{1}{h}(y_h(t) - x(t)) - u(t)$ . Ukážeme, že  $\lim_{h \rightarrow 0} \eta_h(t) = 0$ . Pišme

$$\eta_h'(t) = \frac{1}{h}(y_h'(t) - x'(t)) - u'(t) = \frac{1}{h}(f(y_h(t), t) - f(x(t), t)) - \nabla_x f(x(t), t)u(t).$$

Použijeme Taylorův rozvoj prvního řádu pro funkci  $f$ , dostaneme

$$\eta'_h(t) = \frac{1}{h}(\nabla_x f(x(t), t)(y_h(t) - x(t)) + \frac{1}{2}(y_h(t) - x(t))^T \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x(t), t)(y_h(t) - x(t)) - \nabla_x f(t, x(t))u(t).$$

Tedy máme, že

$$\eta'_h(t) = \nabla_x f(x(t), t) \left[ \frac{1}{h}(y_h(t) - x(t)) - u(t) \right] + \frac{1}{h}z_n(t).$$

Potom  $\eta'_h(t) = A(t)\eta_h(t) + z_n(t)$ .

Pro  $h$  malé je vše v  $K_\delta$  z Věty 4.4. Na  $K_\delta$  jsou  $\nabla_x f$  a  $\nabla_x^2 f$  omezené  $\leq M$ . Zde předpokládáme, že  $f \in C_x^2(\Omega)$ . Potom z Lemmatu 4.2 můžeme psát

$$\|z_h(t)\| \leq \frac{1}{2}M\|y_h(t) - x(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}M\|y_h(t_0) - x(t_0)\|^2 e^{2M|t-t_0|} \leq Ch^2\|w\|^2.$$

Uvědomíme si, že  $\eta_h(t_0) = 0$  a napíšeme integrální rovnici odpovídající diferenciální rovnici pro  $\eta'_h$

$$\eta_h(t) = \eta_h(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)\eta_h(s) + z_n(s)ds,$$

Tedy  $\|\eta_h(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t M\|\eta_h(s)\| + Chds \right| = C|t - t_0|h + \left| \int_{t_0}^t M\|\eta_h(s)ds \right|$ . Použijeme Gronwallovo lemma (Lemma 4.1), dostaneme.

$$\|\eta_h(t)\| \leq \tilde{C}he^{M|t-t_0|},$$

tedy  $\eta_h(t) \rightarrow 0$  pro  $h \rightarrow 0$ , čímž je důkaz ukončen.  $\square$

Ukážeme si jednu aplikaci následující věty pro výpočet derivace řešící funkce.

**Příklad 4.6.** Mějme rovnici  $x' = x$ , její řešící funkce má tvar  $\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}$ . Potom  $\frac{d}{dx}\varphi(t, t_0, x_0) = e^{t-t_0}$ . Totéž můžeme spočítat z předchozí věty. Hledaná funkce řeší diferenciální rovnici  $u' = u$  s počáteční podmínkou  $u(t_0) = t$ . Jejím řešením je  $e^{t-t_0}$ , což jsme chtěli dokázat.

Za uvedených předpokladů dokonce  $\frac{d\varphi}{dw}$  závisí spojitě na  $x_0$  tj. řešící funkce je diferencovatelná (má totální diferenciál) vzhledem k  $x_0$ . Lze též ukázat, že  $\varphi$  je diferencovatelná vůči  $t$  a  $t_0$ .

## 5 Lineární rovnice

**Definice 5.1.** Normu matice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definujeme

$$\|A\| = \sup\{|Ax|; x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\},$$

kde  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  je norma vektoru  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Věta 5.2** (Vlastnosti normy matice). *Nechť  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Potom:*

(i)  $\|A\| \geq 0$  a  $\|A\| = 0$  právě když  $A = 0$ .

(ii)  $\|aA\| = |a|\|A\|$  pro všechna  $a \in \mathbb{R}$ .

(iii)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

(iv)  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ .

(v)  $|Ax| \leq \|A\||x|$  pro  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(vi) Je-li  $A$  regulární, pak  $Ay \geq \frac{|y|}{\|A^{-1}\|}$  pro  $y \in \mathbb{R}^n$ .

*Důkaz.* První tři vlastnosti říkají, že operátor  $\|\cdot\|$  je norma (cvičení).

Dokážeme vlastnost (v). Příklad  $x = 0$  je triviální, nechť tedy  $x \neq 0$ . Položme  $y = \frac{x}{|x|}$ . Potom můžeme psát

$$|Ax| = |A(|x|y)| = |x|Ay = |x||Ay| \leq |x|\|A\|.$$

K důkazu vlastnosti (iv) můžeme psát  $|ABx| \leq \|A\|\|B\||x|$ , kde jsme dvakrát použili již dokázanou vlastnost (v). Potom

$$\|AB\| = \sup_{|x| \leq 1} |ABx| \leq \sup_{|x| \leq 1} \|A\|\|B\||x| \leq \|A\|\|B\| \cdot 1.$$

Nakonec, pro vlastnost (vi) položíme  $v := Ay$ , tedy  $y = A^{-1}v$ . Potom

$$|y| = |A^{-1}v| \leq \|A^{-1}\||v| = \|A^{-1}\||Ay|, \text{ tedy } |Ay| \geq \frac{|y|}{\|A^{-1}\|},$$

čímž je důkaz ukončen. □

**Definice 5.3.** Lineární rovnici rozumíme rovnici

$$x' = A(t)x + g(t), x(t_0) = x_0, \quad (4)$$

kde  $A(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $g(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  jsou spojité.

V přednášce MA3 jste již studovali tento typ rovnic, teď se však budeme věnovat obecnějšímu případu, kdy  $A$  a  $g$  závisí na  $t$ .

**Věta 5.4.** *Nechť  $t_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  je dáno. Pak existuje jediné řešení rovnice (4), definované na celém  $(a, b)$ .*

*Důkaz.* Rovnice (4) je ekvivalentní rovnici (1), kde  $f(x, t) = A(t) \cdot x + g(t)$ .  
Můžeme psát

$$|f(x, t) - f(y, t)| = |A(t)x - A(t)y| \leq \|A(t)\| |x - y|.$$

Funkce  $A(t)$  je omezená na kompaktních intervalech, tedy  $f$  je lipschitzovská.  
Tedy pro každou počáteční podmínku existuje právě jedno maximální řešení.  
Dokážeme, že toto řešení je definované na celém  $(a, b)$ .

*konec 5. přednášky (21.3.2025)*

□