

# Úvod do parciálních diferenciálních rovnic (NMMA339) – cvičení

Petr Velička \*

přednášející: prof. Mgr. Milan Pokorný, Ph.D., DSc. †

LS 2024/25

---

\*petrvel@matfyz.cz

†pokorny@karlin.mff.cuni.cz

## 1 Cvičení 1

**Příklad 1.1.** Nalezneme  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  řešící rovnici  $\frac{\partial u}{\partial x} - 6x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  a splňující  $u(x, 0) = u_0(x)$  pro danou funkci  $u_0$ .

*Důkaz.* Řešme soustavu rovnic  $\frac{dx}{dt} = 1$ ,  $\frac{dy}{dt} = 6x^2$ .

Máme  $\frac{dx}{dt} = 1$ , tedy  $x = t + c_1$ , pak  $\frac{dy}{dt} = 6(t + c_1)^2$ , tedy  $y = -2(t + c_1)^3 + c_2 = -2x^3 + c_2$ . Máme, že  $y + 2x^3$  je konstantní, tedy  $u(x, y) = U(y + 2x^3)$ . Dosazením počáteční podmínky dostáváme  $u_0(x) = u(x, 0) = U(2x^3)$ , tedy  $U(z) = u_0(\sqrt[3]{\frac{z}{2}})$ , z čehož máme  $u(x, y) = u_0(\sqrt[3]{\frac{y+2x^3}{2}})$ .  $\square$

**Příklad 1.2.** Najděte  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  řešení  $\frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  takové, že  $u(0, y) = \frac{1}{y}$ .

*Důkaz.* Máme soustavu ODR  $\frac{dx}{dt} = 1$ ,  $\frac{dy}{dt} = y$ . Jejím řešením jsou funkce  $x(t) = t + c_1$  a  $y(t) = c_2 e^t$ . Platí pro  $y > 0$ ,  $c_2 > 0$  vztah  $\log y = c_2 + t$ , tedy  $x - \log y$  je konstantní funkce. Z toho máme, že  $u(x, y) = U(x - \log y)$  a dosazením počáteční podmínky dostáváme  $\frac{1}{y} = u(0, y) = U(-\log y) \Rightarrow U(z) = e^z$ . Máme tedy  $u(x, y) = \frac{1}{y} e^x$ , obdobná myšlenka funguje i pro případ  $y < 0$  (dostaneme stejný výsledek).  $\square$

## 2 Cvičení 2

**Příklad 2.1.** Nalezněte  $u$  řešení  $(z+y-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x-y)\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$  splňující  $u(x, y, 1) = \sin(x+y)$ .

*Důkaz.* Máme soustavu ODR  $\frac{dx}{dt} = z+y-x$ ,  $\frac{dy}{dt} = z+x-y$ ,  $\frac{dz}{dt} = z$ . Platí  $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2\frac{dz}{dt} = 0$ , jinými slovy  $\frac{d}{dt}(x+y-2z) = 0$ . Tedy platí  $u(x, y, z) = U(x+y-2z)$ . Dosazením počáteční podmínky dostáváme  $u(x, y, 1) = \sin(x+y) = U(x+y-2)$ , tedy  $u(x, y, z) = \sin(x+y-2z+2)$ .  $\square$

**Příklad 2.2.** Nalezněte  $u$  řešení  $x\frac{\partial u}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  takové, že  $u(x, y) = u_0(x)$  na okolí bodu  $(1, 0)$ , případně na okolí bodu  $(0, 0)$ .

*Důkaz.* Řešíme soustavu ODR  $\frac{dx}{dt} = x$ ,  $\frac{dy}{dt} = x+y$ . Máme  $x = c_1 e^t$ , tedy  $y = c_2 e^t + c_1 t e^t$ . Všimneme si, že  $\frac{y}{x} = \frac{c_2 + c_1 t}{c_1}$ , tedy  $x e^{-\frac{y}{x}} = c_1 e^t e^{-\frac{c_2 + c_1 t}{c_1}}$  je konstantní funkce. Proto řešení hledáme ve tvaru  $u(x, y) = U(x e^{-\frac{y}{x}})$ . Má platit  $u(x, 0) = u_0(x) = U(x)$ , tedy  $u(x, y) = u_0(x e^{-\frac{y}{x}})$ . Tento výraz má smysl na okolí  $(x, 0)$ ,  $x \neq 0$ . Pro okolí bodu  $(0, 0)$  má smysl jen řešení pro  $u_0$  konstantní.

Ukážeme si jiný postup. Vycházíme ze vztahů  $x(t) = c_1 e^t$ ,  $y(t) = c_2 e^t + c_1 t e^t$ . Pro jaké hodnoty  $c_1, c_2$  prochází bodem  $(x_0, y_0)$  pro  $t = 0$ ? Máme  $x_0 = c_1$ ,  $y_0 = c_2 + c_1 t = c_2$ . Hledaná charakteristika tedy má tvar  $x(t) = x_0 e^t$ ,  $y(t) = y_0 e^t + x_0 t e^t$ . Tyto charakteristiky protnou přímku  $y = 0$  v bodě  $t = -\frac{y_0}{x_0}$ . Potom máme  $x(t) = x_0 e^{-\frac{y_0}{x_0}}$ . Máme tedy  $u(x, y) = x e^{-\frac{y}{x}}$ .  $\square$

**Příklad 2.3.** Řešte úlohu  $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ,  $u(x, 1) = u_0(x)$  na okolí bodu  $(1, 1)$  (případně  $(0, 0)$ ).

*Důkaz.* Soustava ODR  $\frac{dx}{dt} = x^2$ ,  $\frac{dy}{dt} = xy$ . Platí  $\frac{d}{dt} \log x = \frac{d}{dt} \log y = x$ , tedy  $\frac{d}{dt} \log \frac{x}{y} = 0$ . Řešení je tedy ve tvaru  $u(x, y) = \tilde{U}(\ln(\frac{x}{y})) = U(\frac{x}{y})$ . Platí  $U(\frac{1}{x}) = u(x, 1) = u_0(x)$ , tedy  $U(z) = u_0(\frac{1}{z})$ , z čehož dostaneme  $u(x, y) = u_0(\frac{x}{y})$ . Na okolí počátku má smysl jen  $u_0 = \text{const}$ .  $\square$

**Příklad 2.4.** Řešte úlohu  $(3x+4y)\frac{\partial u}{\partial x} + (4x+3y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  s počáteční podmínkou  $u(x, 0) = u_0(x)$  na okolí  $(1, 0)$ .

*Důkaz.* Řešíme soustavu ODR  $\frac{dx}{dt} = 3x+4y$ ,  $\frac{dy}{dt} = 4x+3y$ . Máme lambda-matici  $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ . Tato matice je singulární pro  $\lambda = 7$  a  $\lambda = -1$  (výpočet determinantu). Příslušné vlastní vektory jsou  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Dostáváme, že

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-7t} + c_2 e^t \\ c_1 e^{-7t} - c_2 e^t \end{pmatrix} \text{ je obecné řešení této soustavy.}$$

Alternativní postup: víme, že  $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 7(x+y)$ , tedy  $\frac{d}{dt} \log(x+y) = 7$ , analogicky  $\frac{d}{dt} \log(x-y) = -1$ . Můžeme tedy psát  $\frac{d}{dt} \log(x+y) + 7 \log(x-y) = 0$ . Potom  $(x+y)(x-y)^7$  je konstantní podél řešení, tedy  $u(x, y) = U((x+y)(x-y)^7)$ .

Aplikujeme počáteční podmínku, dostaneme  $u_0(x) = u(x, 0) = U(x^8)$ . Celkově dostáváme  $u(x, y) = u_0((x+y)^{1/8}(x-y)^{7/8})$ .  $\square$

**Příklad 2.5.** Nalezněte fundamentální systém rovnice  $\frac{\partial u}{\partial x} + xz \frac{\partial u}{\partial y} - xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ .

*Důkaz.* Řešíme soustavu ODR  $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = xz, \frac{dz}{dt} = -xy$ . Vidíme, že  $\frac{dy^2}{dt} + \frac{dz^2}{dt} = 2xyz - 2xyz = 0$ . Tedy  $\psi_1(x, y, z) = y^2 + z^2$  řeší danou soustavu. Hledejme druhé nezávislé řešení. Použijeme větu o redukci. Necht tedy  $\tilde{x} = x, \tilde{y} = y^2 + z^2, \tilde{z} = z$ .

Řešíme novou rovnici  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{x} \sqrt{\tilde{y} - \tilde{z}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = 0$ . Odpovídající soustava ODR je  $\frac{d\tilde{x}}{dt} = 1, \frac{d\tilde{z}}{dt} = -\tilde{x} \sqrt{\tilde{y} - \tilde{z}^2}$ . Úpravami ji dostaneme do tvaru  $\frac{1}{\sqrt{\tilde{y}}} \frac{d\tilde{z}}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{y}}}} = -\tilde{x} d\tilde{x}$ .

Po zintegrování dostáváme  $\arcsin(\frac{\tilde{z}}{\sqrt{\tilde{y}}}) + \frac{1}{2} \tilde{x}^2 = C$ .

Aplikujeme na tuto rovnost funkci sinus a pomocí příslušného součtového vzorce dostaneme rovnost

$$\frac{\tilde{z}}{\sqrt{\tilde{y}}} \cos\left(\frac{\tilde{x}^2}{2}\right) + \sqrt{1 - \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{y}}} \sin\left(\frac{1}{2} \tilde{x}^2\right) = C.$$

Zpětným dosazením původních proměnných dostáváme

$$\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) = C.$$

Můžeme tedy psát  $\psi_2(x, y, z) = z \cos \frac{x^2}{2} + y \sin \frac{x^2}{2}$ . Tímto jsme našli fundamentální systém  $\{\psi_1, \psi_2\}$ .

Na okolí  $(1, 1, 0)$  aplikujeme počáteční podmínku  $u(x, y, 0) = xy$ . Platí  $\psi_1(x, y, 0) = y^2$ , tedy  $y = \sqrt{\psi_1}$ . Obdobně  $\psi_2(x, y, 0) = y \sin \frac{x^2}{2}$ , tedy  $\frac{x^2}{2} = \arcsin \frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_1}}$  a nakonec  $x = \sqrt{2 \arcsin \frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_1}}}$ . Z tohoto již dostáváme  $u(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2} \sqrt{2 \arcsin \frac{z \cos \frac{x^2}{2} + y \sin \frac{x^2}{2}}{\sqrt{y^2 + z^2}}}$ .  $\square$

**Příklad 2.6.** Řešte úlohu  $x \frac{\partial u}{\partial x} + \log x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  s počáteční podmínkou  $u(x, 0) = u_0(x)$  na okolí  $(2, 0)$ .

*Důkaz.* Máme soustavu ODR  $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = \log x$ . Triviálně dostáváme  $x = c_1 e^t, y = \log c_1 t + \frac{1}{2} t^2 + c_2$ .

Fix  $x_0, y_0$ , hledáme konstanty tak, aby v čase  $t = 0$  jsme měli řešení  $(x_0, y_0)$ . Máme  $x_0 = c_1$  a  $y_0 = c_2$ . Potom  $x(t) = x_0 e^t, y(t) = \log x_0 t + \frac{1}{2} t^2 + y_0$ . Najdeme průsečík s osou  $x$  (položíme  $y = 0$ ). Máme  $t^2 + 2 \log x_0 t + 2y_0 = 0$ . Toto je kvadratická rovnice, jejíž řešení jsou  $t_{1,2} = -\log x_0 \pm \sqrt{\log^2 x_0 - 2y_0}$ . Zpětným dosazením dostáváme  $x(t) = x_0 e^{-\log x_0 + \sqrt{\log^2 x_0 - 2y_0}}$  a tedy  $u(x, y) = u_0(x e^{-\log x + \sqrt{\log^2 x - 2y}})$ .  $\square$

**Příklad 2.7.** Řešte úlohu  $\sqrt{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$  s počáteční podmínkou  $u(1, y, z) = y - z$ .

*Důkaz.* Soustava ODR  $\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}$ ,  $\frac{dy}{dt} = \sqrt{y}$ ,  $\frac{dz}{dt} = \sqrt{z}$ . Jejím řešením je  $2\sqrt{x} = t + c_1$ ,  $2\sqrt{y} = t + c_2$ ,  $2\sqrt{z} = t + c_3$ . Z toho dostáváme, že fundamentální systém tvoří například funkce  $\sqrt{x} - \sqrt{y}$  a  $\sqrt{x} - \sqrt{z}$ . Máme  $u(x, y, z) = U(\sqrt{x} - \sqrt{y}, \sqrt{x} - \sqrt{z})$ . Aplikujeme počáteční podmínku:  $u(1, y, z) = U(1 - \sqrt{y}, 1 - \sqrt{z}) = y - z$ . Tedy  $U(a, b) = (1 - a)^2 - (1 - b)^2$ . Celkově dostáváme  $u(x, y, z) = (1 - \sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - (1 - \sqrt{x} + \sqrt{z})^2$ .  $\square$

### 3 Cvičení 3

Na tomto cvičení se budeme věnovat řešení kvazilineárních PDR.

**Příklad 3.1.** Řešte úlohu  $\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = u^2$  s počáteční podmínkou  $u(t_0, x) = u_0(x)$ .

*Důkaz.* Uvažujme homogenní rovnici  $\frac{\partial w}{\partial t} + b\frac{\partial w}{\partial x} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = 0$  a k ní příslušný charakteristický systém.  $\frac{dt}{ds} = 1, \frac{dx}{ds} = b, \frac{dz}{ds} = z^2$ . Potom jednoduše vidíme, že  $\frac{d}{ds}(x - bt) = 0$  a zároveň  $\frac{d}{ds}(\frac{1}{z} + t) = 0$ . Tedy máme charakteristiky  $\psi_1(t, x, z) = x - bt, \psi_2(t, x, z) = \frac{1}{z} + t$ . Řešením původní homogenní rovnice je jejich kombinace, tedy  $\psi(t, x, z) = F(\psi_1(t, x, z), \psi_2(t, x, z))$ . Aplikací počáteční podmínky dostáváme  $\psi(t_0, x, u_0(x)) = 0$ , tedy hledáme  $F(u, v)$  tak, aby  $F(x - bt_0, \frac{1}{u_0(x)} + t_0) = 0$ . Takovou funkcí je  $F(u, v) = \frac{1}{u_0(u + bt_0)} + t_0 - v$ . Zpětným dosazením dostáváme  $\psi(t, x, z) = \frac{1}{u_0(x - b(t - t_0))} + t_0 - \frac{1}{z} + t = 0$ . Z toho již můžeme vyjádřit  $z = \frac{1}{\frac{1}{u_0(x - b(t - t_0))} - t + t_0} = \frac{u_0(x - b(t - t_0))}{1 - (t - t_0)u_0(x - b(t - t_0))}$ .  $\square$

**Příklad 3.2.** Řešte úlohu  $\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = -tu$  s počáteční podmínkou  $u(0, x) = \sin x$ .

*Důkaz.* Uvažujeme rovnici  $\frac{\partial w}{\partial t} + x\frac{\partial w}{\partial x} - tz\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ . K ní máme soustavu ODR  $\frac{dt}{ds} = 1, \frac{dx}{ds} = x, \frac{dz}{ds} = -tz$ . Odtud máme  $\frac{d}{dt}(t - \log x) = 0$  a  $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}t^2 + \log z) = 0$ . Tedy máme  $\psi_1(t, x, z) = t - \log |x|$  a  $\psi_2(t, x, z) = \frac{1}{2}t^2 + \log |z|$ . Dle předchozího příkladu hledáme řešení ve tvaru  $F(\psi_1(t, x, z), \psi_2(t, x, z))$ , a tedy takové, že  $0 = F(\psi_1(0, x, \sin x), \psi_2(0, x, \sin x)) = F(-\log |x|, \log |\sin x|)$ . Uvažujme pouze množinu kde  $x > 0, \sin x > 0$ . Víme, že  $e^{\log \sin x} - \sin e^{\log x} = \sin x - \sin x = 0$ , tedy můžeme psát  $e^{\psi_2} - \sin e^{-\psi_1} = 0$ . Z toho dostáváme  $e^{\frac{1}{2}t^2 + \log z} - \sin e^{-t} = 0$ . Zbývá už jen vyjádřit  $z = e^{-\frac{1}{2}t^2} \sin(xe^{-t})$ .

Alternativní postup: Nalezneme řešení charakteristického systému. Dostaneme  $t(s) = s + c_1, x(s) = c_2 e^s, z'(s) = -(s + c_1)z(s)$ , tedy  $\log z(s) = -\frac{1}{2}s^2 - c_1 s + c_2$ . Z toho dostáváme  $z(s) = c_3 e^{-\frac{1}{2}s^2 - c_1 s}$ . Fix  $t_0, x_0, z_0$ . Najdeme hodnoty konstant takové, aby tento stav nastal v čase  $s = 0$ . Máme  $c_1 = t_0, c_2 = x_0, c_3 = z_0$ . Kdy je  $t(s)$  nulové? V čase  $s = -t_0$ . Potom  $x(-t_0) = x_0 e^{-t_0}$  a  $z(-t_0) = z_0 e^{-\frac{1}{2}t_0^2 + t_0^2} = z_0 e^{\frac{1}{2}t_0^2}$ . Z počáteční podmínky dostáváme  $w(0, x, z) = z - \sin x$ , a tedy  $w(t, x, z) = z(t) - \sin(x(t)) = z e^{\frac{1}{2}t^2} - \sin(xe^{-t}) = 0$ , tedy  $z = e^{-\frac{1}{2}t^2} \sin(xe^{-t})$ .  $\square$

**Příklad 3.3.** Řešte  $x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = y$  s podmínkou  $u(x, 0) = x^2$ .

*Důkaz.* Máme homogenní rovnici  $x\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + y\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ . Charakteristický systém je  $\frac{dx}{ds} = x, \frac{dy}{ds} = 1, \frac{dz}{ds} = y$ . Platí  $\frac{d}{ds}(\log x - y) = 0$  a  $\frac{d}{ds}(\frac{1}{2}y^2 - z) = 0$ . Máme řešení  $F(\log x - y, \frac{1}{2}y^2 - z)$ . Dosadíme počáteční podmínku a máme  $0 = F(\log x, -x^2) = 0$ . Tomu odpovídá například funkce  $F(u, v) = e^{2u} + v$ . Zpětným dosazením získáme  $0 = e^{2\log x - 2y} + \frac{1}{2}y^2 - z$ , tedy  $z = x^2 e^{-2y} + \frac{1}{2}y^2$ .  $\square$

**Příklad 3.4.** Řešte úlohu  $2\frac{\partial u}{\partial x} + 5\frac{\partial u}{\partial y} + 6u = 0$ , s počáteční podmínkou  $u(x, 0) = x \cos x$ .

*Důkaz.* Uvažujme homogenní rovnici  $2\frac{\partial w}{\partial x} + 5\frac{\partial w}{\partial y} - 6z\frac{\partial w}{\partial z}$ . Její charakteristický systém je  $\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = 5, \frac{dz}{dt} = -6z$ . Z těchto rovnic dostáváme charakteristiky  $\frac{d}{dt}(5x - 2y) = 0$  a  $\frac{d}{dt}(3x + \log|z|) = 0$ . Řešení má tvar  $\psi(x, y, z) = F(5x - 2y, 3x + \log|z|)$ . Aplikujeme počáteční podmínku. Platí  $\psi(x, 0, x \cos x) = F(5x, 3x + \log|x \cos x|) = 0$ . Tomu odpovídá funkce  $F(u, v) = 3u - 5v + \log(\frac{u}{5} \cos(\frac{u}{5}))$ . Zpětným dosazením dostáváme  $0 = 3(5x - 2y) - 5(3x + \log z) + \log(x - \frac{2}{5}y \cos(x - \frac{2}{5}y))$ . Z toho máme

$$z = e^{-\frac{6}{5}y} \left( x - \frac{2}{5}y \cos \left( x - \frac{2}{5}y \right) \right)^{1/5}.$$

□

Ukážeme si, že řešení nemusí existovat vždy.

**Příklad 3.5.** Dokažte, že neexistuje řešení úlohy  $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} + 8u = 0$  splňující  $u(x, \frac{3x-1}{2}) = e^x$ .

*Důkaz.* Máme homogenní rovnici  $2\frac{\partial w}{\partial x} + 3\frac{\partial w}{\partial y} - 8z\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ . Její odpovídající charakteristický systém je  $\frac{dx}{ds} = 2, \frac{dy}{ds} = 3, \frac{dz}{ds} = -8z$ . Z toho snadno dostaneme charakteristiky  $\psi_1(x, y, z) = 3x - 2y, \psi_2(x, y, z) = 4x + \log|z|$ . Hledáme řešení ve tvaru  $F(3x - 2y, 4x + \log|z|)$ , dosadíme podmínku, dostáváme  $F(3x - (3x - 1), 4x + \log e^x) = F(1, 5x) = 0$ . To může nastat pouze v případě  $F \equiv 0$ , tedy úloha nemá řešení (kdybychom hledali obecné řešení, dospěli bychom k funkci  $u(x, y) = \varphi(3x - 2y)e^{-4x}$ ). □

## 4 První zápočtová písemka

**Příklad 4.1.** Nalezněte řešení rovnice

$$x^2 z \frac{\partial u}{\partial x} + y^3 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

splňující  $u(x, y, 1) = e^x \cos y$  na okolí bodu  $(1, 1, 1)$ .

*Důkaz.* Charakteristický systém je  $\frac{dx}{ds} = x^2 z$ ,  $\frac{dy}{ds} = y^3$ ,  $\frac{dz}{ds} = z^2$ . Z toho dostáváme  $-\frac{d}{ds} \frac{1}{x} = z = \frac{d}{ds} \log |z|$ , tedy  $\frac{d}{ds} (\log |z| + \frac{1}{x}) = 0$ , což je první charakteristika. Druhou nezávislou charakteristikou získáme zderivováním  $\frac{d}{ds} (\frac{1}{2y^2}) = -1$  a  $\frac{d}{ds} (-\frac{1}{z}) = 1$ , tedy  $\psi_2(x, y, z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2y^2}$ .

Budeme hledat řešení ve tvaru  $u(x, y, z) = \psi(\log |z| + \frac{1}{x}, \frac{1}{z} - \frac{1}{2y^2})$ . Dosadíme počáteční podmínku, dostaneme  $u(x, y, 1) = e^x \cos y = \psi(\frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{2y^2})$ . Máme funkci  $\psi(u, v) = e^{\frac{1}{u}} \cos \left( \sqrt{\frac{1}{2(1-v)}} \right)$ .

Zpětným dosazením získáme  $u(x, y, z) = e^{\frac{1}{\log z + \frac{1}{x}}} \cos \left( \sqrt{\frac{1}{2(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2y^2})}} \right)$ .  $\square$

**Příklad 4.2.** Nalezněte řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = y + x$$

splňující  $u(1, y) = \cos y$  na jistém okolí bodu  $(1, 1)$ .

*Důkaz.* Uvažujme homogenní rovnici

$$\frac{\partial w}{\partial x} + x \frac{\partial w}{\partial y} + (x + y) \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Její charakteristický systém je  $\frac{dx}{ds} = 1$ ,  $\frac{dy}{ds} = x$ ,  $\frac{dz}{ds} = x + y$ . Z toho dostáváme  $x = s + c_1$ ,  $y = \frac{1}{2}s^2 + c_1 s + c_2$ ,  $z = \frac{1}{6}s^3 + \frac{c_1+1}{2}s^2 + (c_1 + c_2)s + c_3$ .

Fix  $(x_0, y_0, z_0)$ . Nalezneme hodnoty konstant tak, abychom se v čase  $s = 0$  nacházeli v tomto bodě. Dostáváme  $c_1 = x_0, c_2 = y_0, c_3 = z_0$ . Dále hledáme  $s$  takové, aby  $x(s) = 1$ . Takové  $s = 1 - x_0$ . Současně chceme, aby  $u(1, y) = \cos y$ . Platí  $0 = z(s) - u(1, y(s)) = z(s) - \cos(y(s))$ . Dostáváme

$$0 = z_0 + \frac{1}{6}(1 - x_0)^3 + \frac{x_0 + 1}{2}(1 - x_0)^2 + (x_0 + y_0)(1 - x_0) - \cos \left( \frac{1}{2}(1 - x_0)^2 + x_0(1 - x_0) + y_0 \right).$$

Z toho již dostáváme

$$u(x, y) = \cos \left( \frac{1}{2}x^2 + x(1 - x) + y \right) - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}(x + 1)(1 - x)^2 - (x + y)(1 - x)$$

na okolí bodu  $(1, 1)$ .  $\square$