Úvod do parciálních diferenciálních rovnic (NMMA339) – cvičení

Petr Velička *
přednášející: prof. Mgr. Milan Pokorný, Ph.D., DSc. †

LS 2024/25

*petrvel@matfyz.cz
†pokorny@karlin.mff.cuni.cz

1 Cvičení 1

Příklad 1.1. Nalezneme $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ řešící rovnici $\frac{\partial u}{\partial x} - 6x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ a splňující $u(x, 0) = u_0(x)$ pro danou funkci u_0.

Důkaz. Řešme soustavu rovnic $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6x^2$.

Máme $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1$, tedy $x = t + c_1$, pak $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6(t + c_1)^2$, tedy $y = -2(t + c_1)^3 + c_2 = -2x^3 + c_2$. Máme, že $y + 2x^3$ je konstantní, tedy $u(x, y) = U(y + 2x^3)$. Dosazením počáteční podmínky dostáváme $u_0(x) = u(x, 0) = U(2x^3)$, tedy $U(z) = u_0(\sqrt[3]{\frac{z}{2}})$, z čehož máme $u(x, y) = u_0(\sqrt[3]{\frac{y+2x^3}{2}})$. □

Příklad 1.2. Najděte $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ řešení $\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ takové, že $u(0, y) = \frac{1}{y}$.

Důkaz. Máme soustavu ODR $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y$. Jejím řešením jsou funkce $x(t) = t + c_1$ a $y(t) = c_2 e^t$. Platí pro $y > 0, c_2 > 0$ vztah $\log y = c_2 + t$, tedy $x - \log y$ je konstantní funkce. Z toho máme, že $u(x, y) = U(x - \log y)$ a dosazením počáteční podmínky dostáváme $\frac{1}{y} = u(0, y) = U(-\log y) \Rightarrow U(z) = e^z$. Máme tedy $u(x, y) = \frac{1}{y}e^x$, obdobná myšlenka funguje i pro případ $y < 0$ (dostaneme stejný výsledek). □

2 Cvičení 2

Příklad 2.1. Nalezněte u řešení $(z+y-x)\frac{\partial y}{\partial x}+(z+x-y)\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$ splňující $u(x,y,1)=sin(x+y)$.

Důkaz. Máme soustavu ODR $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=z+y-x$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=z+x-y$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=z$. Platí $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0$, jinými slovy $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+y-2z)=0$. Tedy platí $u(x,y,z)=U(x+y-2z)$. Dosazením počáteční podmínky dostáváme $u(x,y,1)=sin(x+y)=U(x+y-2)$, tedy $u(x,y,z)=sin(x+y-2z+2)$. □

Příklad 2.2. Nalezněte u řešení $x\frac{\partial u}{\partial x}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial y}=0$ takové, že $u(x,y)=u_0(x)$ na okolí bodu $(1,0)$, případně na okolí bodu $(0,0)$.

Důkaz. Řešíme soustavu ODR $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y$. Máme $x=c_1e^t$, tedy $y=c_2e_t+c_1te^t$. Všimneme si, že $\frac{y}{x}=\frac{c_2+c_1t}{c_1}$, tedy $xe^{-\frac{y}{x}}=c_1e^te^{-\frac{c_2+c_1t}{c_1}}$ je konstantní funkce. Proto řešení hledáme ve tvaru $u(x,y)=U(xe^{-\frac{y}{x}})$. Má platit $u(x,0)=u_0(x)=U(x)$, tedy $u(x,y)=u_0(xe^{-\frac{y}{x}})$. Tento výraz má smysl na okolí $(x,0), x\neq 0$. Pro okolí bodu $(0,0)$ má smysl jen řešení pro u_0 konstatní.

Ukážeme si jiný postup. Vycházíme ze vztahů $x(t)=c_1e^t, y(t)=c_2e^t+c_1te^t$. Pro jaké hodnoty c_1,c_2 prochází bodem (x_0,y_0) pro $t=0$? Máme $x_0=c_1, y_0=c_2+c_1t=c_2$. Hledaná charakteristika tedy má tvar $x(t)=x_0e^t, y(t)=y_0e^t+x_0te^t$. Tyto charakteristiky protnou přímku $y=0$ v bodě $t=-\frac{y_0}{x_0}$. Potom máme $x(t)=x_0e^{-\frac{y_0}{x_0}}$. Máme tedy $u(x,y)=xe^{-\frac{y}{x}}$. □

Příklad 2.3. Řešte úlohu $x^2\frac{\partial u}{\partial x}+xy\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $u(x,1)=u_0(x)$ na okolí bodu $(1,1)$ (případně $(0,0)$).

Důkaz. Soustava ODR $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=xy$. Platí $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log y=x$, tedy $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log\frac{x}{y}=0$. Řešení je tedy ve tvaru $u(x,y)=\tilde{U}(\ln(\frac{x}{y}))=U(\frac{y}{x})$. Platí $U(\frac{1}{x})=u(x,1)=u_0(x)$, tedy $U(z)=u_0(\frac{1}{z})$, z čehož dostaneme $u(x,y)=u_0(\frac{x}{y})$. Na okolí počátku má smysl jen $u_0=const$. □

Příklad 2.4. Řešte úlohu $(3x+4y)\frac{\partial u}{\partial x}+(4x+3y)\frac{\partial u}{\partial y}=0$ s počáteční podmínkou $u(x,0)=u_0(x)$ na okolí $(1,0)$.

Důkaz. Řešíme soustavu ODR $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x+4y$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4x+3y$. Máme lambda-matici $\begin{pmatrix}3-\lambda & 4\\ 4 & 3-\lambda\end{pmatrix}$. Tato matice je singulární pro $\lambda=7$ a $\lambda=-1$ (výpočet determinantu). Příslušné vlastní vektory jsou $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Dostáváme, že $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{matrix}c_1e^{-7t}+c_2e^t\\c_1e^{-7t}-c_2e^t\end{matrix}$ je obecné řešení této soustavy.

Alternativní postup: víme, že $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=7(x+y)$, tedy $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(x+y)=7$, analogicky $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(x-y)=-1$. Můžeme tedy psát $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log(x+y)+7\log(x-y)=0$. Potom $(x+y)(x-y)^7$ je konstantní podél řešení, tedy $u(x,y)=U((x+y)(x-y)^7)$.

Aplikujeme počáteční podmínku, dostaneme $u_0(x)=u(x,0)=U(x^8)$. Celkově dostáváme $u(x,y)=u_0((x+y)^{1/8}(x-y)^{7/8})$. □

Příklad 2.5. Nalezněte fundamentální systém rovnice $\frac{\partial u}{\partial x} + xz\frac{\partial u}{\partial y} - xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Důkaz. Řešíme soustavu ODR $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = xz, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -xy$. Vidíme, že $\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t} = 2xyz - 2xyz = 0$. Tedy $\psi_1(x,y,z) = y^2 + z^2$ řeší danou soustavu. Hledejme druhé nezávislé řešení. Použijeme větu o redukci. Nechť tedy $\tilde{x} = x, \tilde{y} = y^2 + z^2, \tilde{z} = z$.

Řešíme novou rovnici $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{x}\sqrt{\tilde{y} - \tilde{z}^2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = 0$. Odpovídající soustava ODR je $\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} = 1, \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}t} = -\tilde{x}\sqrt{\tilde{y} - \tilde{z}^2}$. Úpravami ji dostaneme do tvaru $\frac{1}{\sqrt{\tilde{y}}}\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{y}}}} = -\tilde{x}\mathrm{d}\tilde{x}$. Po zintegrování dostáváme $\arcsin(\frac{\tilde{z}}{\sqrt{\tilde{y}}}) + \frac{1}{2}x^2 = C$.

Aplikujeme na tuto rovnost funkci sinus a pomocí příslušného součtového vzorce dostaneme rovnost

$$\frac{\tilde{z}}{\sqrt{\tilde{y}}}\cos\left(\frac{\tilde{x}^2}{2}\right) + \sqrt{1 - \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{y}}}\sin\left(\frac{1}{2}x^2\right) = C.$$

Zpětným dosazením původních proměnných dostáváme

$$\frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) = C.$$

Můžeme tedy psát $\psi_2(x,y,z) = z\cos\frac{x^2}{2} + y\sin\frac{x^2}{2}$. Tímto jsme nalezli fundamentální systém $\{\psi_1, \psi_2\}$.

Na okolí $(1,1,0)$ aplikujeme počáteční podmínku $u(x,y,0) = xy$.
Platí $\psi_1(x,y,0) = y^2$, tedy $y = \sqrt{\psi_1}$. Obdobně $\psi_2(x,y,0) = y\sin\frac{x^2}{2}$, tedy $\frac{x^2}{2} = \arcsin\frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_1}}$ a nakonec $x = \sqrt{2\arcsin\frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_1}}}$. Z tohoto již dostáváme $u(x,y,z) = \sqrt{y^2 + z^2}\sqrt{2\arcsin\frac{z\cos\frac{x^2}{2} + y\sin\frac{x^2}{2}}{\sqrt{y^2+z^2}}}$. □

Příklad 2.6. Řešte úlohu $x\frac{\partial u}{\partial x} + \log x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = u_0(x)$ na okolí $(2,0)$.

Důkaz. Máme soustavu ODR $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \log x$. Triviálně dostáváme $x = c_1e^t, y = \log c_1t + \frac{1}{2}t^2 + c_2$.

Fix x_0, y_0, hledáme konstanty tak, aby v čase $t = 0$ jsme měli řešení (x_0, y_0). Máme $x_0 = c_1$ a $y_0 = c_2$. Potom $x(t) = x_0e^t, y(t) = \log x_0t + \frac{1}{2}t^2 + y_0$. Najdeme průsečík s osou x (položíme $y = 0$). Máme $t^2 + 2\log x_0t + 2y_0 = 0$. Toto je kvadratická rovnice, jejíž řešení jsou $t_{1,2} = -\log x_0 \pm \sqrt{\log^2 x_0 - 2y_0}$. Zpětným dosazením dostáváme $x(t) = x_0e^{-\log x_0 + \sqrt{\log^2 x_0 - 2y_0}}$ a tedy $u(x,y) = u_0(xe^{-\log x + \sqrt{\log^2 x - 2y}})$. □

Příklad 2.7. Řešte úlohu $\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ s počáteční podmínkou $u(1,y,z) = y - z$.

Důkaz. Soustava ODR $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sqrt{y}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \sqrt{z}$. Jejím řešením je $2\sqrt{x} = t + c_1, 2\sqrt{y} = t + c_2, 2\sqrt{z} = t + c_3$. Z toho dostáváme, že fundamentální systém tvoří například funkce $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ a $\sqrt{x} - \sqrt{z}$. Máme $u(x, y, z) = U(\sqrt{x} - \sqrt{y}, \sqrt{x} - \sqrt{z})$, Aplikujeme počáteční podmínku: $u(1, y, z) = U(1 - \sqrt{y}, 1 - \sqrt{z}) = y - z$. Tedy $U(a, b) = (1 - a)^2 - (1 - b)^2$. Celkově dostáváme $u(x, y, z) = (1 - \sqrt{x} - \sqrt{y})^2 - (1 - \sqrt{x} - \sqrt{z})^2$. □

3 Cvičení 3

Na tomto cvičení se budeme věnovat řešení kvazilineárních PDR.

Příklad 3.1. Řešte úlohu $\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = u^2$ s počáteční podmínkou $u(t_0, x) = u_0(x)$.

Důkaz. Uvažujme homogenní rovnici $\frac{\partial w}{\partial t} + b\frac{\partial w}{\partial x} + z^2\frac{\partial w}{\partial z}$ a k ní příslušný charakteristický systém. $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = b, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = z^2$. Potom jednoduše vidíme, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(x - bt) = 0$ a zároveň $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\frac{1}{z} + t) = 0$. Tedy máme charakteristiky $\psi_1(t, x, z) = x - bt, \psi_2(t, x, z) = \frac{1}{z} + t$. Řešením původní homogenní rovnice je jejich kombinace, tedy $\psi(t, x, z) = F(\psi_1(t, x, z), \psi_2(t, x, z))$. Aplikací počáteční podmínky dostáváme $\psi(t_0, x, u_0(x)) = 0$, tedy hledáme $F(u, v)$ tak, aby $F(x - bt_0, \frac{1}{u_0(x)} + t_0) = 0$. Takovou funkcí je $F(u, v) = \frac{1}{u_0(u+bt_0)} + t_0 - v$. Zpětným dosazením dostáváme $\psi(t, x, z) = \frac{1}{u_0(x-b(t-t_0))} + t_0 - \frac{1}{z} + t = 0$. Z toho již můžeme vyjádřit $z = \frac{1}{\frac{1}{u_0(x-b(t-t_0))} - t + t_0} = \frac{u_0(x-b(t-t_0))}{1-(t-t_0)u_0(x-b(t-t_0))}$. □

Příklad 3.2. Řešte úlohu $\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = -tu$ s počáteční podmínkou $u(0, x) = \sin x$.

Důkaz. Uvažujeme rovnici $\frac{\partial w}{\partial t} + x\frac{\partial w}{\partial x} - tz\frac{\partial w}{\partial z} = 0$. K ní máme soustavu ODR $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = x, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = -tz$. Odtud máme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t - \log x) = 0$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}t^2 + \log z) = 0$. Tedy máme $\psi_1(t, x, z) = t - \log|x|$ a $\psi_2(t, x, z) = \frac{1}{2}t^2 + \log|z|$. Dle předchozího příkladu hledáme řešení ve tvaru $F(\psi_1(t, x, z), \psi_2(t, x, z))$, a tedy takové, že $0 = F(\psi_1(0, x, \sin x), \psi_2(0, x, \sin x)) = F(-\log|x|, \log|\sin x|)$. Uvažujme pouze množinu kde $x > 0, \sin x > 0$. Víme, že $e^{\log \sin x} - \sin e^{\log x} = \sin x - \sin x = 0$, tedy můžeme psát $e^{\psi_2} - \sin e^{-\psi_1} = 0$. Z toho dostáváme $e^{\frac{1}{2}t^2 + \log z} - \sin e^{\log x - t} = 0$. Zbývá už jen vyjádřit $z = e^{-\frac{1}{2}t^2}\sin(xe^{-t})$.

Alternativní postup: Nalezneme řešení charakteristického systému. Dostaneme $t(s) = s + c_1$, $x(s) = c_2e^s$, $z'(s) = -(s + c_1)z(s)$, tedy $\log z(s) = -\frac{1}{2}s^2 - c_1s + c_2$. Z toho dostáváme $z(s) = c_3e^{-\frac{1}{2}s^2 - c_1 s}$. Fix t_0, x_0, z_0. Najdeme hodnoty konstant takové, aby tento stav nastal v čase $s = 0$. Máme $c_1 = t_0$, $c_2 = x_0$, $c_3 = z_0$. Kdy je $t(s)$ nulové? V čase $s = -t_0$. Potom $x(-t_0) = x_0e^{-t_0}$ a $z(-t_0) = z_0e^{-\frac{1}{2}t_0^2 + t_0^2} = z_0e^{\frac{1}{2}t_0^2}$. Z počáteční podmínky dostáváme $w(0, x, z) = z - \sin x$, a tedy $w(t, x, z) = z(t) - \sin(x(t)) = ze^{\frac{1}{2}t^2} - \sin(xe^{-t}) = 0$, tedy $z = e^{-\frac{1}{2}t^2}\sin(xe^{-t})$. □

Příklad 3.3. Řešte $x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = y$ s podmínkou $u(x, 0) = x^2$.

Důkaz. Máme homogenní rovnici $x\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + y\frac{\partial w}{\partial z} = 0$. Charakteristický systém je $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = x, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 1, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = y$. Platí $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\log x - y) = 0$ a $\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{2}y^2 - z)}{\mathrm{d}=}0$. Máme řešení $F(\log x - y, \frac{1}{2}y^2 - z)$. Dosadíme počáteční podmínku a máme $0 = F(\log x, -x^2) = 0$. Tomu odpovídá například funkce $F(u, v) = e^{2u} + v$. Zpětným dosazením získáme $0 = e^{2\log x - 2y} + \frac{1}{2}y^2 - z$, tedy $z = x^2e^{-2y} + \frac{1}{2}y^2$. □

Příklad 3.4. Řešte úlohu $2\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}+6u=0$, s počáteční podmínkou $u(x,0)=x\cos x$.

Důkaz. Uvažujme homogenní rovnici $2\frac{\partial w}{\partial x}+5\frac{\partial w}{\partial y}-6z\frac{\partial w}{\partial z}$. Její charakteristický systém je $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=5, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-6z$. Z těchto rovnic dostáváme charakteristiky $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5x-2y)=0$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(3x+\log|z|)=0$. Řešení má tvar $\psi(x,y,z)=F(5x-2y,3x+\log z)$. Aplikujeme počáteční podmínku. Platí $\psi(x,0,x\cos x)=F(5x,3x+\log|x\cos x|)=0$. Tomu odpovídá funkce $F(u,v)=3u-5v+\log\left(\frac{u}{5}\cos\left(\frac{u}{5}\right)\right)$. Zpětným dosazením dostáváme $0=3(5x-2y)-5(3x+\log z)+\log(x-\frac{2}{5}y\cos(x-\frac{2}{5}y))$. Z toho máme

$$z=e^{-\frac{6}{5}y}\left(x-\frac{2}{5}y\cos\left(x-\frac{2}{5}y\right)\right)^{1/5}.$$

□

Ukážeme si, že řešení nemusí existovat vždy.

Příklad 3.5. Dokažte, že neexistuje řešení úlohy $2\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}+8u=0$ splňující $u(x,\frac{3x-1}{2})=e^x)$.

Důkaz. Máme homogenní rovnici $2\frac{\partial w}{\partial x}+3\frac{\partial w}{\partial y}-8z\frac{\partial w}{\partial z}=0$. Její odpovídající charakteristický systém je $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=2, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=3, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=-8z$. Z toho snadno dostaneme charakteristiky $\psi_1(x,y,z)=3x-2y, \psi_2(x,y,z)=4x+\log|z|$. Hledáme řešení ve tvaru $F(3x-2y,4x+\log|z|)$, dosadíme podmínku, dostáváme $F(3x-(3x-1),4x+\log e^x)=F(1,5x)=0$. To může nastat pouze v případě $F\equiv 0$, tedy úloha nemá řešení (kdybychom hledali obecné řešení, dospěli bychom k funkci $u(x,y)=\varphi(3x-2y)e^{-4x}$). □