

# Pravděpodobnost a matematická statistika (NMSA202)

Petr Velička \*

přednášející: doc. RNDr. Michal Pešta, Ph.D. †

LS 2024/25

---

\*petrvel@matfyz.cz

†pesta@karlin.mff.cuni.cz

# 1 Náhodné jevy

Začneme nejdříve základními definicemi, bez nichž vůbec nemůžeme mluvit o pravděpodobnosti.

**Definice 1.1.** *Výběrovým prostorem* rozumíme množinu  $\Omega$  všech možných výsledků nějakého experimentu. Prvky  $\omega \in \Omega$  této množiny nazýváme *elementárními jevy*. Podmnožině  $A \subset \Omega$  říkáme (*náhodný*) *jev*.

Pro ilustraci uvedeme následující motivační příklad, kde podrobně popíšeme souvislosti s právě zadanými pojmy.

**Příklad 1.2.** Házíme dvakrát férovou mincí. Naším výběrovým prostorem bude množina  $\Omega = \{PP, PO, OP, OO\}$ . Událost, že první hod je panna, je tedy  $A = \{PP, PO\}$ . V tomto zápise písmeno  $P$  odpovídá tomu, že padla panna, kdežto písmeno  $O$  odpovídá orlu.

Dále uvažujme jevy  $H_1$  – při prvním hodu padne panna, a  $H_2$  – při druhém hodu padne panna. Necht jsou všechny výsledky stejně pravděpodobné (jinými slovy, mince je férová), potom pravděpodobnost, že padne alespoň jedna panna (tj. nastane jev  $H_1 \cup H_2$ ) je  $\frac{3}{4}$ .

*Důkaz.* Zřejmě z předchozího máme  $H_1 = \{PP, PO\}$  a  $H_2 = \{OP, PP\}$ . Pravděpodobnost spočteme jako podíl velikosti  $|H_1 \cup H_2| = 3$  a velikosti celého prostoru  $|\Omega| = 4$ .  $\square$

Tato jednoduchá intuice však selže v případě nekonečné (nespočetné) množiny  $\Omega$ , neboť jak již čtenář jistě ví z přednášky základů teorie míry, na nespočetné množině neexistuje “rozumný” způsob, jak měřit množiny. Musíme proto pracovat pouze s jistou třídou podmnožin  $\Omega$ , které budeme říkat  $\sigma$ -algebra.

**Definice 1.3.** Necht  $\Omega \neq \emptyset$  je množina a  $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$  soubor jejích podmnožin. Této množině  $\mathcal{A}$  říkáme  $\sigma$ -algebra, jestliže jsou splněny následující podmínky:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- (ii) Pokud  $A \in \mathcal{A}$ , pak  $A^C := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ ,
- (iii) Pokud  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ , pak  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

Dvojici  $(\Omega, \mathcal{A})$  nazýváme *měřitelný prostor*.

Každé události  $A \in \mathcal{A}$  přiřadíme číslo  $\mathbb{P}(A)$ , které nazýváme *pravděpodobnost* jevu  $A$ . Jelikož chceme, aby se zachovala intuice z předchozího příkladu, musíme tuto představu náležitým způsobem formalizovat.

**Definice 1.4.** Necht  $(\Omega, \mathcal{A})$  je měřitelný prostor. Zobrazení  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  nazýváme *pravděpodobnostní mírou* (*pravděpodobností*), jestliže:

- (i)  $P(\Omega) = 1$ ,
- (ii) Pro libovolné po dvou disjunktní měřitelné množiny  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  platí  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ .

Trojici  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  nazýváme *pravděpodobnostní prostor*.

Přímo z této definice již můžeme odvodit pár základních vlastností pravděpodobnosti, se kterými dále budeme pracovat. Ve všech následujících tvrzeních pracujeme s pravděpodobnostním prostorem  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

**Pozorování 1.5** (Základní vlastnosti pravděpodobnostní míry). *Pro výše jmenovaný pravděpodobnostní prostor platí následující tvrzení:*

1.  $P(\emptyset) = 0$ ,
2. Pro  $A, B \in \mathcal{A}$  disjunktní platí  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
3. Pro  $A \in \mathcal{A}$  platí  $P(A^C) = 1 - P(A)$ ,
4. Pro  $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$  platí  $P(A) \leq P(B)$ .

*Důkaz.* 1. Uvažujme posloupnost  $A_1 = \Omega, A_2 = A_3 = \dots = \emptyset$ . Potom z vlastnosti (ii) z definice máme, že  $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \dots) = P(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset)$ . Tedy  $\sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$ , což může nastat pouze v případě  $P(\emptyset) = 0$  (jde o součet nekonečně mnoha nezáporných čísel).

2. Necht  $A_1 = A, A_2 = B, A_i = \emptyset$  pro  $i > 2$ . Tvrzení plyne přímo z vlastnosti (ii) z definice pravděpodobnostní míry a již dokázané vlastnosti 1.
3.  $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$ . Tato rovnost platí, neboť množina je vždy disjunktní se svým komplementem.
4.  $P(B) = P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$ . Jelikož funkce  $P$  je nezáporná, snadno vidíme, že  $P(B) \geq P(A)$ .

□

**Lemma 1.6** (Pravděpodobnost sjednocení). *Pro libovolné  $A, B \in \mathcal{A}$  platí  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .*

*Důkaz.* Rozepíšeme  $A \cup B = (A \cap B^C) \cup (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$ . Tyto tři množiny jsou zřejmě po dvou disjunktní. Dále díky aditivitě pravděpodobnosti máme  $P(A \cup B) = P(A \cap B^C) + P(A \cap B) + P(A^C \cap B) + P(A \cap B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ . □

**Věta 1.7** (Spojitost pravděpodobnosti). *Bud  $A_n \uparrow A$  nebo  $A_n \downarrow A$  pro  $A_n, A \in \mathcal{A}$ . Potom platí  $P(A_n) \rightarrow P(A)$ .*

*Důkaz.* Necht  $A_n \uparrow A$ . Potom z definice  $A_1 \subset A_2 \dots$  a platí  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Definujme posloupnost  $B_n$ :  $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ . Potom  $B_i$  jsou po dvou disjunktní a platí  $A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$ . Zřejmě také platí  $A \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ . Pak  $P(A_n) = P(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i)$ . Z toho již můžeme odvodit  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = P(A)$ .

Případ klesající  $A_n$  se dokáže analogicky, stačí uvažovat  $C_n = A_n^C$ . □

*konec 1. přednášky (17.2.2025)*

Uvedeme si ještě jeden příklad ilustrující intuitivní chápání pravděpodobnosti a zavedeme první takzvané pravděpodobnostní rozdělení. Uvažujme případ, že prostor  $\Omega$  je konečný. Necht všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné, pak platí

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

V tomto případě mluvíme o *rovnoměrném rozdělení pravděpodobnosti*.

**Příklad 1.8** (Hod dvěma kostkami). Výběrový prostor  $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1 \dots 6\}\}$  má 36 prvků. Jestliže všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné, pak platí  $P(A) = \frac{|A|}{36}$ . Například, pravděpodobnost toho, že součet na kostkách je přesně 11, je  $2/36$ , protože pouze dva výsledky  $(5, 6)$  a  $(6, 5)$  odpovídají této události.

V praxi často chceme odlišit, zda pravděpodobnost výskytu jedné události nějakým způsobem závisí na výskytu jiné události. K tomu nám poslouží pojem nezávislosti jevů.

**Definice 1.9.** Dvě události  $A, B \in \mathcal{A}$  jsou *nezávislé*, jestliže platí  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Obdobně, množina událostí  $\{A_i : i \in I\}$  (kde indexová množina  $I$  je nejvýše spočetná) je *nezávislá*, jestliže platí

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

pro každou konečnou podmnožinu  $J \subset I$ .

Je důležité si uvědomit, že disjunktní události s kladnou pravděpodobností nejsou nezávislé (neboť součin jejich pravděpodobností není roven 0 – pravděpodobnost výskytu jejich prázdného průniku). Obecně se pracuje se dvěma typy nezávislosti – předpokládanou (plyne z podstaty zkoumané úlohy) a odvozenou (dokázaná pomocí jiných vlastností úlohy). Následující příklad ilustruje praktické použití právě zavedeného pojmu.

**Příklad 1.10.** Házíme férovou mincí 10krát. Necht  $A$  je událost “padla aspoň jedna panna”. Pak platí  $P(A) = 1 - (1/2)^{10}$ .

*Důkaz.* Necht  $T_j$  je událost, že při  $j$ -tém hodu padne orel. Můžeme psát  $P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - P(\text{samé orly}) = 1 - P(T_1 \cap \dots \cap T_{10})$ . Dále díky nezávislosti (v tomto případě jde o nezávislost předpokládanou) jevů  $T_j$  máme  $1 - P(T_1 \cap \dots \cap T_{10}) = 1 - P(T_1) \cdot \dots \cdot P(T_{10}) = 1 - (1/2)^{10} \approx 0.999$ .  $\square$

Dalším silným nástrojem v teorii pravděpodobnosti je podmíněná pravděpodobnost, která nám poskytuje odpověď na otázku “Pokud vím, že nastala událost  $B$ , jaká je pravděpodobnost události  $A$ ?”.

**Definice 1.11.** Mějme jevy  $A, B \in \mathcal{A}$ . Pokud  $P(B) > 0$ , pak *podmíněná pravděpodobnost*  $A$  za podmínky  $B$  je definována vztahem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Poznamenejme si několik základních vlastností podmíněné pravděpodobnosti, jejichž důkaz snadno plyne z příslušných definic.

**Pozorování 1.12** (Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti).

- (i) Pro pevné  $B \in \mathcal{A}, P(B) > 0$  je  $P(\cdot|B)$  pravděpodobnostní míra.
- (ii) Obecně platí  $P(A|B) \neq P(B|A)$ , platí totiž  $P(A|B) = P(B|A) \frac{P(A)}{P(B)}$  (pokud obě strany rovnosti dávají smysl).
- (iii) Události  $A$  a  $B$  jsou nezávislé právě tehdy, když  $P(A|B) = P(A)$  (předpokládáme nenulovost  $P(B)$ ).
- (iv)  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$  v případě, že  $P(A)P(B) > 0$ .

*Důkaz.* Vlastnosti (iii) a (iv) plynou přímo z definice vynásobením vhodnou konstantou.

Vlastnost (ii) se dokáže následujícím protipříkladem, uvažujme hod dvěma férovými mincemi. Nechť  $H_1$  je událost “padla aspoň jedna panna” a  $H_2$  událost “padly dvě panny”. Potom  $P(H_1|H_2) = 1$  ale  $P(H_2|H_1) = \frac{1}{3}$ . Důkaz obecného vztahu je ponechán čtenáři jako snadné (ale užitečné) cvičení.

Nakonec, vlastnost (i) je důsledkem toho, že pro libovolnou množinu  $A \in \mathcal{A}$  je  $A \cap B$  měřitelná, a navíc pro libovolný systém po dvou disjunktních množin  $A_i, i \in \mathbb{N}$  platí  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \frac{1}{P(B)} P((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B) = \frac{1}{P(B)} P(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)) = \frac{1}{P(B)} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$ .  $\square$

Použití podmíněné pravděpodobnosti v praxi však někdy může vést k neintuitivním výsledkům, které ilustruje následující příklad.

**Příklad 1.13.** Uvažujme nemoc  $D$  a test, který má dva možné výsledky. Pravděpodobnosti výsledků tohoto testu jsou uvedeny v následující tabulce. Zde sloupce odpovídají přítomnosti/absenci nemoci a řádky výsledkům testu.

	$D$	$D^C$
+	0.009	0.099
−	0.001	0.891

Z definice spočteme následující podmíněné pravděpodobnosti:

$$P(+|D) = \frac{P(+ \cap D)}{P(D)} = \frac{0.009}{0.009 + 0.001} = 0.9.$$

$$P(-|D^C) = \frac{P(- \cap D^C)}{P(D^C)} = \frac{0.891}{0.891 + 0.099} \approx 0.9.$$

Vychází nám, že test je docela přesný, neboť nemocní lidé mají test v 90% případů pozitivní, stejně tak zdraví lidé jsou v 90% případů negativní.

Dále předpokládejme, že pacient šel na test a získal pozitivní výsledek. Spočteme, s jakou pravděpodobností je opravdu nakažený.

$$P(D|+) = \frac{P(D \cap +)}{P(+)} = \frac{0.009}{0.009 + 0.099} \approx 0.08.$$

Vyšlo nám, že na první pohled zdánlivě precizní test ve skutečnosti má méně než 10% úspěšnost. Jedním z důvodů této diskrepance může být například velký nepoměr zdravých lidí vůči nakaženým (pouze jedno procento) ve zdrojových datech, což je jev který se obecně vyskytuje u většiny nemocí. V praxi se proto často pracuje s domněnkami – například testujeme jen pacienty, kteří vykazují nějaké symptomy apod.

Na závěr uvedeme dvě velmi užitečné věty, které se často používají v nej-různějších úlohách a týkají se podmíněné pravděpodobnosti. Zformulujeme je pro spočetné rozklady, ale obdobná tvrzení platí i pro konečné rozklady s velmi podobným důkazem.

**Věta 1.14** (Zákon úplné pravděpodobnosti). *Nechť  $A_1, A_2, \dots$  je spočetný disjunkttní rozklad  $\Omega$  takový, že  $P(A_i) > 0$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Potom pro libovolnou událost  $B \in \mathcal{A}$  platí:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i).$$

*Důkaz.* Definujme posloupnost množin  $C_i = B \cap A_i$  pro  $i \in \mathbb{N}$ . Zjevně  $\{C_i, i \in \mathbb{N}\}$  je disjunkttní pokrytí  $B$ . Potom  $P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)$ .  $\square$

**Věta 1.15** (Bayes). *Nechť  $A_1, A_2, \dots$  je spočetný disjunkttní rozklad  $\Omega$  takový, že  $P(A_i) > 0$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Mějme událost  $B \in \mathcal{A}$  s nenulovou pravděpodobností. Potom platí:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

*Důkaz.* Příímým výpočtem dostáváme

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)},$$

kde poslední rovnost získáme aplikací *Věty 1.14*.  $\square$

Použití Bayesovy věty si ukážeme na následujícím příkladu.

**Příklad 1.16.** Uvažujme e-mailovou schránku. Máme tři kategorie e-mailů:  $A_1$  – spam,  $A_2$  – nízká priorita,  $A_3$  – vysoká priorita. Na základě předchozích zkušeností víme, že  $P(A_1) = 0.7$ ,  $P(A_2) = 0.2$ ,  $P(A_3) = 0.1$ . Nechť  $B$  je událost, že daný e-mail obsahuje slovo “zdarma”. Platí  $P(B|A_1) = 0.9$ ,  $P(B|A_2) =$

$0.01$ ,  $P(B|A_3) = 0.01$ <sup>1</sup>. Jaká je pravděpodobnost, že příchozí e-mail obsahující slovo “zdarma” je spam?

Přímým výpočtem z Bayesovy věty získáme

$$P(A_1|B) = \frac{0.9 \cdot 0.7}{0.9 \cdot 0.7 + 0.01 \cdot 0.2 + 0.01 \cdot 0.1} = 0.995.$$

Tedy pravděpodobnost, že tento e-mail je spam je přes 99%!

**Věta 1.17** (O postupném podmiňování). *Nechť  $\{A_i\}_{i=1}^n$  jsou náhodné jevy takové, že  $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) > 0$ . Pak platí*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1).$$

*Důkaz.* Dokazujeme indukcí podle počtu náhodných jevů. Z definice podmíněné pravděpodobnosti víme, že  $P(A_2 \cap A_1) = P(A_2|A_1)P(A_1)$ . Dále

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(A_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) = P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right),$$

čímž je důkaz ukončen. □

---

<sup>1</sup>Tyto hodnoty se nutně nemusí sečíst na 1

## 2 Náhodné veličiny

V této kapitole se budeme věnovat náhodným veličinám, což bude formalizovat (a zobecňovat) jakýsi intuitivní chápání toho, že nějaká proměnná nabývá různých hodnot s určitými pravděpodobnostmi. Začneme ústřední definicí celé statistiky – náhodnou veličinou.

**Definice 2.1.** Necht  $(\Omega, \mathcal{A})$  je měřitelný prostor. *Náhodná veličina* je měřitelné zobrazení, které přiřazuje každému výsledku  $\omega$  reálné číslo  $X(\omega)$ . Jinými slovy,  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \forall x \in \mathbb{R}$ .

*konec 2. přednášky (18.2.2025)*

**Úmluva 2.2.** Zavedeme značení  $[X \in B] = \{\omega : X(\omega) \in B\}$ ,  $[X \leq a] = \{\omega, X(\omega) \leq a\}$ . Platí tedy  $[X \in B], [X \leq a] \in \mathcal{A}$  pro všechna  $B \in \mathcal{B}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Jde o náhodné jevy a jsou tedy dobře definované jejich pravděpodobnosti  $P[X \in B], P[X \leq a]$ .

**Příklad 2.3.** Házíme mincí desetkrát. Necht  $X(\omega)$  je počet orlů v posloupnosti  $\omega$ . Jestliže  $\omega = O O P O O P O O P P$  (kde  $O$  je orel a  $P$  je panna), platí  $X(\omega) = 6$ .

V předchozí kapitole jsme mluvili o pravděpodobnostním rozdělení, je na čase tento pojem formálně zdefinovat.

**Definice 2.4.** *Rozdělením náhodné veličiny*  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  nazýváme indukovanou pravděpodobnostní míru  $P_X$  na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  definovanou jako

$$P_X(B) := P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Máme tedy jakýsi obraz míry  $P$  v zobrazení  $P_X$  čímž se  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  zobrazí na pravděpodobnostní prostor  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ . V opačném směru můžeme použít takzvané kanonické vnoření do prostoru  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ , kde naší zvolenou měřitelnou funkcí bude identita, tedy není potřeba se bát, že by příslušný prostor nemusel existovat. Následující věta říká, že nezáleží ve kterém z těchto dvou prostorů integrujeme libovolnou funkci.

**Věta 2.5** (O přenosu integrace). *Bud'  $g$  měřitelná funkce na měřitelném prostoru  $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$  a  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{M}, \mathcal{M})$ . Necht  $P_X$  je míra na  $\mathcal{M}$  indukovaná zobrazením  $X$ , tedy  $P_X(M) = P[X^{-1}(M)]$  pro  $M \in \mathcal{M}$ . Potom, je-li aspoň jedna strana definována, platí*

$$\int_{\Omega} g[X(\omega)] dP(\omega) = \int_{\mathbb{M}} g(x) dP_X(x).$$

*Důkaz.* Důkaz této věty je poměrně technický, hlavní ideou je “klasický” postup z teorie míry postupným důkazem nejdříve pro charakteristickou funkci, poté pro jednoduchou měřitelnou (nabývající jen konečně mnoha hodnot), pak pro nezápornou měřitelnou a na závěr pro obecnou měřitelnou funkci.



Nechť  $g = \chi_B, B \in \mathcal{M}$ . Tedy  $g(X(\omega)) = 1$  pro  $X(\omega) \in B$  (a všude jinde nulová), tedy pro  $\omega \in X^{-1}(B)$ . Potom máme

$$\int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{X^{-1}(B)} dP(\omega) = P[X^{-1}(B)].$$

Pro pravou stranu máme

$$\int_{\mathbb{M}} g(x) dP_X(x) = \int_B dP_X(x) = P_X(B) = P[X^{-1}(B)].$$

Dále necht  $g$  je jednoduchá měřitelná, tedy  $g(\cdot) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{B_k}(\cdot)$  pro  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_k \in \mathbb{R}$  a  $B_k \in \mathcal{M}$  pro všechna  $k$ . Z linearity integrálu plyne (vytkneme sumu)  $\int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{X^{-1}(B)} dP(\omega) = P[X^{-1}(B)]$ .

Je-li  $g$  nezáporná měřitelná, potom existuje posloupnost  $g_n$  jednoduchých měřitelných funkcí takových, že  $g_n \nearrow g$ . Potom dle Léviho věty o monotonní konvergenci máme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g[X(\omega)] dP(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n[X(\omega)] dP(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{M}} g_n(x) dP_X(x) = \int_{\mathbb{M}} g(x) dP_X(x), \end{aligned}$$

kde třetí rovnost plyne z již dokázané části pro jednoduché měřitelné funkce.

Nakonec, pro  $g$  měřitelnou existuje rozklad  $g = g^+ - g^-$  takový, že  $g^+, g^-$  jsou nezáporné měřitelné, tedy požadované tvrzení plyne z části pro nezáporné měřitelné funkce.  $\square$

Na závěr poznamenejme, že se nám budou obzvlášť hodit volby  $(\mathbb{M}, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  pro  $n \geq 1$ .

Připomeňme si, že jsou-li  $\mu, \nu$  dvě  $\sigma$ -konečné míry na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  a je-li  $\nu \ll \mu$  (tedy  $\mu(B) = 0$  implikuje  $\nu(B) = 0$ ), potom z Radonovy-Nikodymovy věty plyne existence nezáporné měřitelné funkce  $f$  takové, že  $\nu(B) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu$  pro všechna  $B \in \mathcal{B}$ . Této funkci  $f$  říkáme Radonova-Nikodymova derivace a píšeme  $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ . Taková funkce  $f$  je navíc určena jednoznačně až na množinu  $\mu$ -míry 0.

Využijeme těchto poznatků tak, že zvolíme vhodnou referenční míru na  $\mathbb{R}$  a rozdělení  $P_X$  pak bude popsáno právě zavedenou Radonovou-Nikodymovou derivací. Vhodné referenční míry jsou např.

- Lebesgueova míra  $\lambda$ ,
- Čítačí míra na spočetné podmnožině  $\mathbb{R}$ , platí  $\mu_S(B) = |B \cap S|$  kde  $S$  je nejvýše spočetná podmnožina  $\mathbb{R}$ .

**Definice 2.6.** Buď  $X$  náhodná veličina a  $P_X$  její rozdělení. Necht  $P_X$  je absolutně spojitě vůči  $\mu$ , kde  $\mu$  je  $\sigma$ -konečná míra na  $\mathbb{R}$ . Pak funkci  $f_X$  splňující  $P_X(B) = \int_B f_X d\mu$  pro všechny  $B \in \mathcal{B}$  nazveme *hustotou* rozdělení náhodné veličiny  $X$  vůči míře  $\mu$ .

Je třeba si dát pozor na to, aby zvolená referenční míra opravdu byla absolutně spojitá, například při hodu kostkou má výsledek 1 nenulovou pravděpodobnost, ale  $\lambda(\{1\}) = 0$ .

**Věta 2.7.** *Buď  $X$  náhodná veličina a  $P_X$  její rozdělení. Je-li  $f_X$  hustota (rozdělení) vůči  $\sigma$ -konečné míře  $\mu$ , pak*

$$P[X \in B] = \int_B f_X d\mu.$$

*Důkaz.* Jde o přímý důsledek Radonovy-Nikodymovy věty a vztahu mezi  $P_X$  a  $P$ .  $\square$

Další funkcí, která plně charakterizuje rozdělení náhodné veličiny je tzv. distribuční funkce.

**Definice 2.8.** Buď  $X$  náhodná veličina na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a  $P_X$  její rozdělení. *Distribuční funkce  $F_X$  náhodné veličiny  $X$  je definována vztahem*

$$F_X(a) := P((-\infty, a]) = P[X \leq a].$$

Uvedeme si několik užitečných vlastností distribučních funkcí:

**Důsledek 2.9** (Základní vlastnosti distribučních funkcí).

- (i) *Distribuční funkce jednoznačně určuje rozdělení (jinými slovy,  $F_X = F_Y$  implikuje  $P_X = P_Y$ ).*
- (ii) *Různé náhodné veličiny mohou mít stejné distribuční funkce, tedy stejné rozdělení.*

*konec 3. přednášky (24.2.2025)*

**Příklad 2.10.** Hodíme dvěma kostkami, označme  $Y$  počet sudých čísel na těchto dvou kostkách. Potom  $Y \in \{0, 1, 2\}$ . Z definice  $F_Y(a) = P[Y \leq a]$ , tedy

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq a < 1, \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq a < 2, \\ 1, & a \geq 2. \end{cases}$$

Dále, z toho, že  $P_Y(0) = \frac{1}{4} > 0$ , plyne, že míra  $P_Y$  není absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře  $\lambda$ , tedy musíme uvažovat čítací míru  $\mu_{\mathbb{Z}}$  na množině celých čísel. Potom hustota  $f_Y$  má následující tvar:

$$f_Y(a) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & a = 0, \\ \frac{1}{2}, & a = 1, \\ \frac{1}{4}, & a = 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vidíme, že hustota odpovídá skokům distribuční funkce v daném bodě. V následující větě uvedeme charakterizaci distribučních funkcí.

**Věta 2.11** (Charakterizace distribučních funkcí). *Buď  $X$  náhodná veličina a  $F_X$  její distribuční funkce. Pak*

- (i)  $F_X$  je neklesající;
- (ii)  $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = 0$ ,  $\lim_{a \rightarrow +\infty} F_X(a) = 1$ ;
- (iii)  $F_X$  je zprava spojitá.

*Navíc, každá funkce  $F$  splňující body (i)-(iii) z této věty je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny.*

*Důkaz.* Dokážeme pouze implikaci o vlastnostech distribuční funkce, opačná implikace (existuje rozdělení) vyžaduje pokročilý matematický aparát z analýzy a teorie míry, který prozatím postrádáme.

- (i)  $F_X(a) = P[X \leq a]$ . Bez újmy na obecnosti necht  $b > a$ . Potom  $F_X(b) = P[X \leq b] = P([X \leq a] \cup [a < X \leq b]) = P[X \leq a] + P[a < X \leq b]$  z aditivní míry, druhý sčítanec je nezáporný, tedy dostáváme požadované tvrzení.
- (ii) Platí  $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X \in (-\infty, -n]] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X \in A_n] = 0$ . Poslední rovnost platí ze spojitosti míry (Věta 1.7), neboť platí  $A_n \searrow \emptyset$ . Obdobně se ukáže tvrzení pro  $a \rightarrow +\infty$  (cvičení).
- (iii) Stačí uvažovat posloupnost  $a_n = a + \frac{1}{n}$  pro  $n \in \mathbb{N}$ . Požadované tvrzení opět plyne z věty o spojitosti míry.

□

Pro každou funkci  $F$  splňující vlastnosti z předchozí věty existuje míra  $\mu_F$  na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  určená vztahem  $\mu_F((-\infty, a]) = F(a)$  pro všechna  $a$ . Tato míra je konečná a platí  $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ .

**Definice 2.12** (Rozklad pravděpodobnostního rozdělení). Každou pravděpodobnostní míru  $P_X$  můžeme rozdělit na tři složky  $P_X = P_{X_{as}} + P_{X_{ds}} + P_{X_{sg}}$ , kde  $P_{X_{as}}$  je absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře  $\lambda$ ,  $P_{X_{ds}}$  (diskrétní spojitá) je absolutně spojitá vůči číselní míře  $\mu$  na nějaké spočetné podmnožině  $\mathbb{R}$  a nakonec  $P_{X_{sg}}$  (singulární) není absolutně spojitá vůči  $\lambda$  ani ji nelze napsat jako spočetnou kombinaci Diracových měr  $\delta_x$ .

Příkladem singulární distribuční funkce je například integrál takzvaného Cantorova diskontinua. Obecně taková rozdělení nemají “hezké” vlastnosti, proto s nimi již nebudeme pracovat.

**Definice 2.13.** Náhodnou veličinu  $X$  nazveme *diskrétní*, jestliže existují  $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$ ,  $\{x_i\}_{i \in I}$  a  $\{p_i \in (0, 1]\}_{i \in I}$  takové že  $P[X \in B] = \sum_{i, x_i \in B} p_i$  pro všechny borelovské  $B$ .

Platí  $P[X = x_i] = p_i$  a  $\sum_{i \in I} p_i = 1$ . Rozdělením takové veličiny je funkce  $P_X = \sum_{i \in I} p_i \delta_{x_i}$ , kde  $\delta_u$  je Diracova míra v bodě  $u$ . Toto rozdělení je absolutně spojitě vůči číselní míře na  $S = \{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$ . Potom funkce  $f_X(u) := \begin{cases} p_i, u = x_i, \\ 0, \text{jinak} \end{cases}$  je hustotou (občas také pravděpodobnostní funkcí) zkoumaného rozdělení.

**Definice 2.14.** Náhodná veličina  $X$  se nazývá (*absolutně*) *spojitá*, pokud její rozdělení  $P_X$  je absolutně spojitě vůči Lebesgueově míře  $\lambda$ .

Pro spojitou náhodnou veličinu  $X$  vždy existuje hustota  $f_X$  (nezáporná a jednoznačná až na množinu  $\lambda$ -míry 0) splňující  $P[X \in B] = \int_B f_X(t) dt$  a speciálně  $F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t) dt$  pro všechna  $a \in \mathbb{R}$ . Taková  $F_X$  má derivaci ve skoro všech bodech a platí  $F'_X(a) = f_X(a)$  pro s.v.  $a$ . Analogicky pro diskrétní náhodnou veličinu  $Y$  je hustota funkcí, která nabývá v bodě  $a$  hodnoty distribuční funkce v daném bodě.

Ne každá veličina, se kterou se běžně setkáme je ryze spojitá nebo ryze diskrétní. Příkladem veličiny, která má obě složky nenulové, je například úhrn denních srážek, s nenulovou pravděpodobností nenaprší vůbec, ale když už začne pršet, úhrn srážek je spojitá náhodná veličina.

**Lemma 2.15.** *Nechť  $F_X$  je distribuční funkce náhodné veličiny  $X$ . Pak pro  $a < b$  platí*

- (i)  $P[a < X \leq b] = P[X \in (a, b)] = F_X(b) - F_X(a)$ ,
- (ii)  $P[X > a] = 1 - F_X(a)$ ,
- (iii)  $P[X = a] = F_X(a) - F_X(a^-)$ , kde  $F_X(a^-)$  je limita zleva  $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(a - h)$  a odtud  $P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a^-)$ .
- (iv) pro spojitou náhodnou veličinu platí  $P[a \leq X \leq b] = P[a \leq X < b] = P[a < X \leq b] = P[a < X < b] = F_X(b) - F_X(a)$ .

*Důkaz.* Důkaz je jednoduchý, plyne z příslušných definic. Uvedeme např. důkaz pro bod (iii).

$$P[X = a] = \lim_{h \rightarrow 0^+} P[a - h < X \leq a] = F_X(a) - \lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(a - h). \quad \square$$

*konec 4. přednášky (25.2.2025)*

Dalším užitečným pojmem je funkce inverzní k distribuční funkci, které běžně říkáme kvantil.

**Definice 2.16.** Nechť  $X$  je náhodná veličina s distribuční funkcí  $F$ . *Inverzní distribuční funkce* neboli *kvantilová funkce* je definována jako

$$F^{-1}(q) = \inf \{x : F(x) > q\}$$

pro  $q \in (0, 1)$ . Hodnoty  $F^{-1}$  ve speciálních bodech mají své vlastní názvy:

- $F^{-1}(\frac{1}{4})$  je *první kvartil*,

- $F^{-1}(\frac{1}{2})$  je *medián*,
- $F^{-1}(\frac{3}{4})$  je *třetí kvartil*.

Je-li  $F$  ryze rostoucí a spojitá, je  $F^{-1}(q)$  to jediné  $x \in \mathbb{R}$  takové, že  $F(x) = q$ , jinými slovy,  $F$  je bijekce z  $\mathbb{R}$  do  $(0, 1)$ . Takto definovaná kvantilová funkce je neklesající a zprava spojitá. Dále z  $F^{-1}$  můžeme jednoznačně určit  $F$ , tedy také charakterizuje rozdělení  $P_X$ . Nakonec, o dvou náhodných veličinách  $X$  a  $Y$  říkáme, že jsou stejně rozdělené, zapisujeme  $X \stackrel{d}{=} Y$ , právě tehdy, když  $F_X(x) = F_Y(x)$  pro všechna  $x$ . To však neznamena, že  $X = Y$ .

Ukážeme si několik užitečných příkladů rozdělení (diskrétních a později i spojitých). Tato rozdělení se používají v praxi při modelování jednoduchých systémů, ale u komplikovanějších modelů se s těmito rozděleními bohužel nevystačíme.

## 2.1 Diskrétní náhodné veličiny

**Definice 2.17** (Bodové rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má *bodové rozdělení* v bodě  $a$  právě tehdy, když  $P[X = x] = \chi_{\{x=a\}}, x \in \mathbb{R}$ . Zapisujeme  $X \sim \delta_a$ . Potom platí  $F_X(x) = \chi_{\{x \geq a\}}$ .

**Definice 2.18** (Diskrétní rovnoměrné rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má *diskrétní rovnoměrné rozdělení* na  $\{1, \dots, k\}$  právě tehdy, když

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/k, & x = 1, \dots, k; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

**Definice 2.19** (Bernoulliho rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má *Bernoulliho rozdělení* s parametrem  $p \in (0, 1)$  právě tehdy, když  $f_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}$  pro  $x \in 0, 1$ . Zapisujeme  $X \sim \text{Alt}(p)$  nebo  $X \sim \text{Be}(p)$ . Tímto rozdělením modelujeme jevy, u kterých jsou pouze dva možné výsledky (úspěch/neúspěch, hod mincí).

**Definice 2.20** (Binomické rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má *binomické rozdělení* s parametry  $n \in \mathbb{N}$  a  $p \in (0, 1)$  právě tehdy, když

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \chi_{\{x \in \{0, \dots, n\}\}}.$$

Zapisujeme  $X \sim \text{Bi}(n, p)$ . Používáme toto v případě sčítaně nezávislých<sup>2</sup> veličin s Bernoulliho rozdělením (počet úspěchů mezi  $n$  pokusy).

**Definice 2.21** (Geometrické rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má *geometrické rozdělení* s parametrem  $p \in (0, 1)$  (zapisujeme  $X \sim \text{Geo}(p)$ ) právě tehdy, když

$$f_X(x) = p(1-p)^x$$

pro  $x \in \mathbb{N}_0$ . Taková náhodná veličina vyjadřuje počet neúspěchů před prvním úspěchem v posloupnosti nezávislých pokusů.

<sup>2</sup>Přesná definice nezávislých veličin bude uvedena později.

**Definice 2.22** (Negativně binomické rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má *negativně binomické rozdělení* s parametry  $n \in \mathbb{N}$  a  $p \in (0, 1)$  (píšeme  $X \sim NB(n, p)$ ), jestliže platí

$$f_X(x) = \binom{n+x-1}{n-1} p^n (1-p)^x$$

pro  $x \in \mathbb{N}_0$ . Rozdělení vyjadřuje počet neúspěchů před  $n$ -tým úspěchem v posloupnosti nezávislých pokusů. Specifický případ  $NB(1, p) = Geo(p)$ .

**Definice 2.23** (Poissonovo rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má *Poissonovo rozdělení* s parametrem  $\lambda > 0$  (zapisujeme  $X \sim Po(\lambda)$ ) právě tehdy, když

$$f_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

pro  $x \in \mathbb{N}_0$ . Jestliže  $X \sim Po(\lambda_X)$  a  $Y \sim Po(\lambda_Y)$  jsou nezávislé, potom  $X + Y \sim Po(\lambda_X + \lambda_Y)$ . Jestliže  $n \rightarrow \infty$  a  $np \rightarrow \lambda < \infty$ , potom  $Bi(n, p)$  konverguje k  $Po(\lambda)$ .

## 2.2 Absolutně spojité náhodné veličiny

**Definice 2.24** (Spojitě rovnoměrné rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má *rovnoměrné rozdělení* na intervalu  $[a, b]$  právě tehdy, když  $f_X(x) = (b-a)^{-1} \chi_{\{x \in [a, b]\}}$ . Zapisujeme  $X \sim U(a, b)$  (uniform) nebo  $X \sim R(a, b)$  (rovnoměrné).

**Definice 2.25** (Normální rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má *normální (Gaussovo) rozdělení* s parametry  $\mu \in \mathbb{R}$  a  $\sigma^2 > 0$  (zapisujeme  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ) právě tehdy, když

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

pro  $x \in \mathbb{R}$ .

Toto rozdělení je enormně důležité, uvedeme si proto několik jeho vlastností. Nejprve, máme-li  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , potom  $Z := (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$ . Tomuto rozdělení říkáme *standardní normální rozdělení*. Dále, máme-li dvě nezávislé normálně rozdělené veličiny  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ , potom  $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$ .

Distribuční funkce  $N(0, 1)$  nejde vyjádřit analyticky, máme jen  $\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$ , kde  $\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -x^2/2$  je hustota standardního normálního rozdělení. Její hodnoty proto vyhledáváme v tabulkách, případně počítáme numericky.

**Příklad 2.26.** Předpokládejme, že  $X \sim N(3, 5)$ . Spočteme  $P[X \geq 1]$ . Dále spočtete  $q = F_X^{-1}(0.2)$ .

*Důkaz.* Počítáme přímo

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - P[Z \leq \frac{1-3}{\sqrt{5}}] \approx 1 - \Phi(-0.8944) = 0.81.$$

Dále z tabulek víme, že  $\Phi(-0.8416) = 0.2$ , potom

$$0.2 = P[X \leq q] = P[Z \leq \frac{q - \mu}{\sigma}] = \Phi[\frac{q - \mu}{\sigma}],$$

proto  $-0.8416 = \frac{q - \mu}{\sigma} = \frac{q - 3}{\sqrt{5}}$  a tedy  $q = 3 - 0.8416\sqrt{5} \approx 1.1181$ .  $\square$

**Definice 2.27** (Exponenciální rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má *exponenciální rozdělení* s parametrem  $\lambda > 0$  (zapisujeme  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ) právě tehdy, když

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \chi_{\{x > 0\}}.$$

**Definice 2.28** (Gamma rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má *Gamma rozdělení* s parametry  $a, p > 0$  právě tehdy, když

$$f_X(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} \chi_{\{x > 0\}},$$

kde  $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt$  je gamma funkce (spojité rozšíření faktoriálu). Zapisujeme  $X \sim \text{Gamma}(a, p)$  nebo  $X \sim \Gamma(a, p)$ . Exponenciální rozdělení  $\text{Exp}(a)$  je speciálním případem Gamma rozdělení s parametrem  $p = 1$ .

Opět máme součtový vzorec pro nezávislé veličiny  $X \sim \Gamma(a, p_X), Y \sim \Gamma(a, p_Y)$ , platí totiž  $X + Y \sim \Gamma(a, p_X + p_Y)$ .

**Definice 2.29** (Beta rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má *Beta rozdělení* s parametry  $\alpha, \beta > 0$  právě tehdy, když

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \chi_{\{x \in (0,1)\}}.$$

Zapisujeme  $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$  nebo  $X \sim B(\alpha, \beta)$ . Všimněme si, že na rozdíl od předchozích rozdělení jde o rozdělení na kompaktu.

*konec 5. přednášky (3.3.2025)*

**Definice 2.30** ( $\chi^2$ -rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má  $\chi^2$ -rozdělení s  $p$  stupni volnosti (zapisujeme  $X \sim \chi_p^2$ ) právě tehdy, když

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(p/2)2^{p/2}} x^{p/2-1} e^{-x/2} \chi_{\{x > 0\}}.$$

Máme-li soubor nezávislých náhodných veličin  $X_1, \dots, X_p \sim N(0, 1)$ , potom součet jejich druhých mocnin odpovídá  $\chi^2$ -rozdělení,  $\sum_{i=1}^p X_i^2 \sim \chi_p^2$ .

**Definice 2.31** (Studentovo  $t$ -rozdělení). Náhodná veličina  $X$  má Studentovo  $t$ -rozdělení s  $\nu$  stupni volnosti (zapisujeme  $X \sim t_\nu$ ) právě tehdy, když

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}} \frac{1}{(1+x^2/\nu)^{(\nu+1)/2}}.$$

**Definice 2.32** (Cauchyho rozdělení). Cauchyovo rozdělení je speciální případ  $t$ -rozdělení, když  $\nu = 1$ . Potom platí

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

K zajímavým vlastnostem Cauchyova rozdělení patří například to, že nemá střední hodnotu (bude upřesněno později).

Přejdeme dále k vícerozměrným náhodným veličinám, jedním z jejich využití je například možnost formální definice pojmu nezávislosti několika náhodných veličin.

**Definice 2.33.** Necht  $(\Omega, \mathcal{A})$  je měřitelný prostor. *Náhodný vektor* je měřitelné zobrazení, které každému výsledku  $\omega$  přiřadí reálný  $d$ -rozměrný vektor  $\vec{X}(\omega)$ . To znamená, že

$$\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \wedge \{\omega \in \Omega : \vec{X}(\omega) \leq \vec{x}\} \in \mathcal{A} \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d.$$

**Definice 2.34.** Rozdělením náhodného vektoru  $\vec{X} : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  nazveme indukovanou pravděpodobnostní míru  $P_{\vec{X}}$  na  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  definovanou jako

$$P_{\vec{X}}(B) := P[\{\omega \in \Omega : \vec{X}(\omega) \in B\}]$$

pro všechny  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

Již na první pohled je zřejmá analogie s jednorozměrnými náhodnými veličinami v tom, že  $P_{\vec{X}}$  je obraz míry  $P$  v zobrazení  $\vec{X}$ , kde se původní pravděpodobnostní prostor zobrazí na  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P_{\vec{X}})$ . Platí, že pokud máme náhodný vektor  $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ , potom  $X_i$  je náhodná veličina pro všechna  $i \in \{1, \dots, d\}$  (důsledek definice, avšak platí i opačná implikace).

**Definice 2.35.** Necht  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor. *Sdružená distribuční funkce* náhodného vektoru  $\vec{X}$  je funkce  $F_{\vec{X}} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  definovaná jako

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}) = P(\vec{X} \leq \vec{x}) = P\left(\bigcup_{l=1}^d \{X_l \leq x_l\}\right)$$

pro všechna  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T \in \mathbb{R}^d$ .

Analogicky s náhodnými veličinami si zformulujeme tvrzení o základních vlastnostech sdružených distribučních funkcí.

**Věta 2.36** (Vlastnosti sdružené distribuční funkce). *Pokud je  $F$  sdružená distribuční funkce  $d$ -rozměrného náhodného vektoru  $\vec{X}$ , pak platí*

- (i)  $F$  je po složkách neklesající a zprava spojitá;
- (ii)  $\lim_{x_l \rightarrow -\infty} F(\vec{x}) = 0$  pro každé  $l = 1 \dots d$ ;



(iii)  $\lim_{x_l \rightarrow +\infty \forall l} F(\vec{x}) = 1$ .

*Důkaz.* Nejdříve dokážeme vlastnost (i). Fixujme  $x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_d \in \mathbb{R}$  a definujeme funkci  $G(x) := F_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_{l-1}, x, x_{l+1}, \dots, x_d)$ . Z monotonie pravděpodobnosti je  $G$  neklesající a nezáporná. Jelikož je  $G$  neklesající, nutně existuje limita  $\lim_{y \rightarrow x^+} G(y) \geq G(x)$ . Dokážeme, že dochází k rovnosti (čímž dokážeme spojitost zprava).

Z Heineovy věty plyne, že  $\lim_{y \rightarrow x^+} G(y) = \lim G(x + \frac{1}{n})$ . Označme  $B_n := (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_{l-1}] \times (-\infty, x + \frac{1}{n}) \times (-\infty, x_{l+1}] \times \dots \times (-\infty, x_n]$ . Potom máme, že  $B_n \searrow B := (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_{l-1}] \times (-\infty, x] \times (-\infty, x_{l+1}] \times \dots \times (-\infty, x_n]$ .

Dále s využitím věty o spojitosti míry (Věta 1.7) můžeme psát

$$\lim_{y \rightarrow x^+} G(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(x + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\vec{X}}(B_n) = P_{\vec{X}}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P_{\vec{X}}(B) = G(x),$$

čímž je ukončen důkaz vlastnosti (i).

K důkazu vlastnosti (ii) opět mějme pevná  $x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ . Opět uvažujme funkci  $G$  z předchozí části důkazu, která je neklesající a nezáporná. Proto musí existovat její limita  $\lim_{\vec{x} \rightarrow -\infty} G(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(-n)$  (opět plyne z Heineovy věty). Definujme  $C_n := (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_{l-1}] \times (-\infty, -n] \times (-\infty, x_{l+1}] \times \dots \times (-\infty, x_n]$ , potom platí že  $C_n \searrow \emptyset$ . Podobným argumentem jako posledně máme

$$\lim_{x_l \rightarrow -\infty} F(\vec{x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\vec{X}}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = P_{\vec{X}}(\emptyset) = 0,$$

čímž jsme dokázali vlastnost (ii).

Nakonec si uvědomíme, že podmínka z vlastnosti (iii) je ekvivalentní tomu, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{x_l\} = \infty$ . Z již několikrát použité věty o spojitosti pravděpodobnosti máme, že  $1 \geq F_{\vec{X}}(\vec{x}) \geq F_{\vec{X}}(\min\{x_l\}[1, \dots, 1]^T)$ . Stačí tedy dokázat, že poslední uvedená limita je rovna  $\infty$ .

Položme  $H(x) := F_{\vec{X}}(x[1, \dots, 1]^T)$ . Z monotonie pravděpodobnosti máme, že funkce  $H$  je neklesající. Dále  $0 \leq H(x) \leq 1$ , tedy existuje  $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(n)$  (jako limita posloupnosti). Položme  $D_n := (-\infty, n]^d$ . Opět z věty o spojitosti míry můžeme psát

$$\lim_{x_l \rightarrow +\infty \forall l} F(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\vec{X}}(D_n) = P_{\vec{X}}(\mathbb{R}^d) = 1,$$

čímž jsme získali požadovanou rovnost.  $\square$

**Věta 2.37** (Marginální distribuční funkce). *Pokud je  $F_{\vec{X}}$  sdružená distribuční funkce náhodného vektoru  $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ , pak*

$$\lim_{x_d \rightarrow +\infty} F_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_d) = F(x_1, \dots, x_{d-1}), \forall \vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T \in \mathbb{R}^d,$$

kde  $F$  je distribuční funkce náhodného podvektoru  $[X_1, \dots, X_{d-1}]^T$ .

*Důkaz.* Necht je dána libovolná posloupnost  $\{z_n\}_{n=1}^\infty$  taková, že  $\lim z_n = \infty$ . Dále označme  $B := \bigcap_{l=1}^{d-1} \{X_l \leq x_l\}$ ,  $B_n := B \cup \{X_d \leq z_n\}$  a  $D_n := \left(\bigcup_{m=n}^\infty B_m^C\right)^C$ . Platí  $D_n \subseteq B_n \subseteq B = \bigcup_{m=1}^\infty B_m$  a  $D_n \nearrow B$ . Ze spojitosti míry (Věta 1.7) máme, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n) = P(B)$  a z monotonie míry máme, že  $P(D_n) \leq P(B_n) \leq P(B)$ . Potom (viz věta o dvou strážnících) máme  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(B)$ . Nakonec z Heineovy věty máme, že  $\lim_{x_d \rightarrow \infty} P(B \cap \{X_d \leq x_d\}) = P(B)$ .  $\square$

Výše zmíněný limitní přechod můžeme opakovat vícekrát a “marginalizovat” až na jednorozměrný případ. Navíc, složky můžeme permutovat, tedy v kombinaci s touto větou můžeme “vyřadit” libovolnou složku.

**Definice 2.38** (Marginální rozdělení). Necht  $J \subseteq \{1, \dots, d\}$  a  $|J| = m$ . Potom *náhodný podvektor* definujeme jako  $\vec{Y} \equiv \{X_l\}_{l \in J} : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$  a *marginálním rozdělením* rozumíme indukovanou pravděpodobnostní míru  $P_{\vec{Y}}$  na prostoru  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ .

Ve speciálním případě  $J = \{1, \dots, m\}$  pak máme  $P_{\vec{Y}}(B) = P_{\vec{X}}(B \times \mathbb{R}^{d-m})$ . Pro  $|J| = 1$  celkem snadno vidíme, že se jedná o náhodnou veličinu.

V následujících definicích definujeme spojitě a diskrétní náhodné vektory podobně tomu, jak jsme to udělali u náhodných veličin.

**Definice 2.39.** Náhodný vektor  $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$  nazveme *diskrétní*, jestliže existují nejvýše spočetná množina  $I \subseteq \mathbb{N}$  a posloupnosti  $\{\vec{x}_i\}_{i \in I}$  prvků  $\mathbb{R}^d$  a  $\{p_i\}_{i \in I}$  prvků intervalu  $(0, 1]$  takové, že platí

$$P_{\vec{X}} = \sum_{i \in I} p_i \delta_{\vec{x}_i} \text{ a } \sum_{i \in I} p_i = 1,$$

kde  $\delta_{\vec{u}}$  značí Diracovu míru v  $\vec{u} \in \mathbb{R}^d$ .

**Definice 2.40.** Náhodný vektor  $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$  nazveme (*absolutně*) *spojitý*, jestliže  $P_{\vec{X}}$  je absolutně spojitá vůči  $d$ -rozměrné Lebesgueově míře  $\lambda^d$ .

V případě diskrétního náhodného vektoru pak můžeme explicitně uvést sdruženou distribuční funkci  $F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \sum_{i \in I} p_i \chi_{[\vec{x}_i, \infty)}(\vec{x}) = \sum_{i \in I}^{\vec{x}_i \leq \vec{x}} p_i$ , kde relaci  $\leq$  uvažujeme po složkách (musí platit pro všechny složky zároveň).

Pro spojitě náhodné vektory si uvědomíme, že sdružená distribuční funkce má derivaci  $\frac{\partial^d}{\partial x_1 \dots \partial x_d} F_{\vec{X}}$  s.v. vzhledem k  $\lambda^d$  a platí následující vztah pro sdruženou hustotu

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{\partial^d}{\partial x_1 \dots \partial x_d} F_{\vec{X}}.$$

Tento vztah platí  $\lambda^d$ -skoro všude a navíc v námi zkoumaných příkladech je  $F_{\vec{X}}$  dostatečně hladká, tedy nezáleží na pořadí derivací. Potom také můžeme z hustoty spočítat distribuční funkci pomocí vztahu

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_d) dt_d \dots dt_1,$$

pro všechna  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T \in \mathbb{R}^d$ . Díky Fubiniově větě opět nezáleží na pořadí integrálů.

*konec 6. přednášky (4.3.2025)*

**Věta 2.41** (Hustota vzhledem k součinové referenční míře). *Nechť  $P_{\vec{X}}$  je rozdělení náhodného vektoru  $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$  a nechť existují  $\sigma$ -konečné míry  $\mu_l, l \in \{1, \dots, d\}$  na  $\mathbb{R}$  takové, že pro jejich součin platí  $P_{\vec{X}} \ll \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_d$ . Potom  $P_{X_l} \ll \mu_l$  pro všechny složky  $l \in \{1, \dots, d\}$ . Dále pak existují nezáporné měřitelné funkce (hustoty)  $f_{\vec{X}} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  a  $f_{X_l} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  pro  $l \in \{1, \dots, d\}$  takové, že*

$$P_{\vec{X}}(\times_{l=1}^d (-\infty, x_l]) = F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \int_{\times_{l=1}^d (-\infty, x_l]} f_{\vec{X}}(\vec{t}) d(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_d)$$

pro všechna  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T$ . Pro borelovskou množinu  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  navíc platí

$$P_{\vec{X}}(B) = \int_B f_{\vec{X}}(\vec{t}) d(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_d).$$

Potom také  $F_{X_l}(x_l) = \int_{-\infty}^{x_l} f_{X_l}(t) d\mu_l$  pro všechna  $x_l \in \mathbb{R}$  a všechny složky  $l \in \{1, \dots, d\}$ , kde

$$f_{X_l}(t) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_d) d(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_{l-1} \otimes \mu_{l+1} \otimes \dots \otimes \mu_d)$$

platí  $\mu_l$ -skoro všude.

*Důkaz.* Existence hustot plyne přímo z Radonovy-Nikodymovy věty. Zbytek plyne z Fubiniho věty (předpoklady splněny díky Radonově-Nikodymově větě a faktu, že pravděpodobnostní prostor je vždy normalizovaný).  $\square$

Poznamenejme, že předpoklad existence příslušných měr je automaticky splněn v případě diskrétních nebo absolutně spojitých náhodných vektorů.

**Příklad 2.42.** Mějme absolutně spojitý náhodný vektor  $[X, Y]^T$ . Potom existuje jeho sdružená distribuční funkce  $F_{[X, Y]^T}(x, y)$ . Chceme-li dostat jednorozměrnou distribuční funkci  $F_X(x)$ , s použitím Věty 2.37 dostáváme  $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{[X, Y]^T}(x, y)$ . Potom jeho hustotu dostaneme, zderivováním  $f_X(x) = F'_X(x)$ . Navíc z předchozí věty (Věta 2.41) máme, že existuje sdružená hustota  $f_{[X, Y]^T}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{[X, Y]^T}(x, y)$ . Pro získání jednorozměrné hustoty  $f_X$  pak už jen stačí integrovat podle  $y$  přes celou reálnou osu.

Nechť  $\vec{X}$  je diskrétní náhodný vektor a  $\nu$  čítací míra na  $\{\vec{x}_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^d$ , pak hustotu tohoto vektoru vzhledem k čítací míře  $\nu$  nazýváme *pravděpodobnostní funkcí* diskrétního mnohorozměrného rozdělení  $\vec{X}$ .

**Příklad 2.43.** Uvažujme dvojrozměrný náhodný vektor  $[X, Y]^T$ . Pro přehlednost uvedeme i řádkové/sloupkové součty (jde o marginální hustoty).

	$Y = 0$	$Y = 1$	
$X = 0$	1/9	2/9	1/3
$X = 1$	2/9	4/9	2/3
	1/3	2/3	1

Potom přímým výpočtem můžeme získat například  $f_{[X,Y]^T}(1,1) = P(X = 1, Y = 1) = 4/9$ .

**Příklad 2.44.** Necht dvourozměrný náhodný vektor  $[X, Y]^T$  je rovnoměrně rozdělen na jednotkovém čtverci. Pak z Věty 2.41 okamžitě vychází  $f_{[X,Y]^T}(x, y) = \chi_{\{(x,y) \in [0,1]^2\}}$ . Určíme  $P[X < 1/2, Y < 1/2]$ . Tato událost  $B := \{X < 1/2, Y < 1/2\}$  odpovídá podmnožině jednotkového čtverce, tedy zintegrováním přes tuto podmnožinu nepočítáme nic jiného než plošný obsah této množiny. Z Fubiniovy věty tedy dostáváme  $P(B) = 1/4$ .

Uvedeme užitečný důsledek předchozí věty pouze v případě dvourozměrných vektorů, snadno se však dají rozšířit i pro případ vícerozměrných vektorů.

**Důsledek 2.45** (Marginální rozdělení pro dvourozměrné náhodné vektory). *Pokud diskrétní náhodný vektor  $[X, Y]^T$  má sdruženou pravděpodobnostní funkci  $f_{[X,Y]^T}$ , pak marginální pravděpodobnostní funkce pro  $X$  je*

$$f_X(x) = P[X = x] = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y f_{[X,Y]^T}(x, y).$$

*Pokud spojitý náhodný vektor  $[X, Y]^T$  má sdruženou pravděpodobnostní funkci  $f_{[X,Y]^T}$ , pak marginální hustota pro  $X$  je*

$$f_X(x) = \int f_{[X,Y]^T}(x, y) dy.$$

Věnujme opět pozornost pojmu nezávislosti náhodných veličin. Všimněme si, že platí následující vlastnost

$$\lim_{x_j \rightarrow \infty \forall j \in \{1, \dots, d\} \setminus l} F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \lim_{x_j \rightarrow \infty \forall j \in \{1, \dots, d\} \setminus l} P[X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d] = P[X_l \leq x_l] =: F_{X_l}(x_l).$$

**Definice 2.46.** Náhodné veličiny  $X_1, \dots, X_d$  jsou *nezávislé*, pokud  $F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \prod_{l=1}^d F_{X_l}(x_l)$  pro každý vektor  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T \in \mathbb{R}^d$ .

Analogicky s předchozí definicí definujeme nezávislost náhodných vektorů.

**Definice 2.47.** Náhodné vektory  $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_d$  jsou *nezávislé*, pokud

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \prod_{l=1}^d F_{\vec{X}_l}(\vec{x}_l)$$

pro každý “nad-vektor”  $\vec{x} = [\vec{x}_1^T, \dots, \vec{x}_d^T]^T \in \mathbb{R}^{\sum_{l=1}^d d_l}$  kde  $\vec{X} = [\vec{X}_1^T, \dots, \vec{X}_d^T]^T$  a  $\vec{X}_l$  jsou  $d_l$ -rozměrné náhodné vektory pro všechna  $l \in \{1, \dots, d\}$ .

Dalším důležitým pojmem je takzvaný nosič náhodné veličiny. Rozumíme tím v zásadě množinu, kde náhodná veličina “žije”. Uvedeme zde definici pro diskrétní a spojitě náhodné veličiny. Tyto pojmy se budou hodit pro vymezení prostoru, přes který poté budeme integrovat.

**Definice 2.48.** *Nosičem* diskrétní náhodné veličiny  $X$  nazýváme následující množinu  $S(X) = \{x \in \mathbb{R} : P[X = x] > 0\}$ . *Nosičem* spojitě náhodné veličiny  $Y$  rozumíme množinu  $S(Y) = \{y \in \mathbb{R} : f_Y(y) > 0\}$ . Obdobně definujeme i nosič náhodného vektoru (cvičení).

**Věta 2.49** (Ekvivalentní charakterizace nezávislosti). *Nechť sdružená pravděpodobnostní funkce diskrétního náhodného vektoru  $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$  je  $f_{\vec{X}}(\vec{x}) = P[\vec{X} = \vec{x}]$ . Pak platí, že náhodné veličiny  $\{X_1, \dots, X_d\}$  jsou nezávislé právě tehdy, když*

$$P[\vec{X} = \vec{x}] = \prod_{l=1}^d P[X_l = x_l]$$

pro všechny vektory  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T \in \times_{l=1}^d S(X_l)$ .

*Nechť sdružená pravděpodobnostní funkce spojitěho náhodného vektoru  $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$  je  $f_{\vec{X}}(\vec{x})$ . Pak platí, že  $\{X_1, \dots, X_d\}$  jsou nezávislé právě tehdy, když*

$$P[\vec{X} = \vec{x}] = \prod_{l=1}^d f_{X_l}(x_l)$$

pro  $\lambda^d$ -skoro všechny vektory  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T \in \times_{l=1}^d S(X_l)$ .

*Důkaz.* Dokážeme oba případy (spojitý a diskrétní) najednou tak, že budeme uvažovat příslušnou referenční součinnovou míru.

Nejdříve dokážeme implikaci  $\Rightarrow$ . Uvažujme vektor  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T$ . Potom z definice nezávislosti a linearity integrálu dostáváme

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \prod_{l=1}^d F_{X_l}(x_l) = \prod_{l=1}^d \int_{-\infty}^{x_l} f_{x_l}(t_l) d\mu_l = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} \prod_{l=1}^d f_{x_l}(t_l) d\mu_d \cdots d\mu_1,$$

kde druhá rovnost plyne z věty o hustotě vzhledem k součinnové referenční míře (Věta 2.41) s mírou  $\lambda^d$ , případně sčítací mírou  $\nu$  na  $\mathbb{R}^d$ . Dále díky Fubiniově větě můžeme pokračovat v úpravách

$$\int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} \prod_{l=1}^d f_{x_l}(t_l) d\mu_d \cdots d\mu_1 = \int_{(-\infty, \vec{x}]} \prod_{l=1}^d f_{x_l}(t_l) d(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_d).$$

Pak už ale nutně musí platit  $f_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_d) = \prod_{l=1}^d f_{x_l}(t_l)$ .

Implikace  $\Leftarrow$  se dokáže obráceným postupem (cvičení).  $\square$

**Důsledek 2.50.** Předpokládejme, že  $S([X, Y]^T) = S(X) \times S(Y)$ . Pokud pro sdruženou pravděpodobnostní funkci diskrétního náhodného vektoru  $[X, Y]^T$  platí  $P[X = x, Y = y] = g(x)h(y)$  pro nějaké měřitelné funkce  $g, h$  a pro všechna  $[x, y]^T \in S([X, Y]^T)$ , pak  $X$  a  $Y$  jsou nezávislé.

Obdobně, pokud pro sdruženou pravděpodobnostní funkci spojitého náhodného vektoru  $[X, Y]^T$  platí  $f_{[X, Y]^T}(x, y) = g(x)h(y)$  pro nějaké měřitelné funkce  $g, h$  a pro  $\lambda^2$ -skoro všechna  $[x, y]^T \in S([X, Y]^T)$ , pak  $X$  a  $Y$  jsou nezávislé.

Poznámka:  $g$  a  $h$  nutně nemusí být hustoty nebo pravděpodobnostní funkce, ale normovaná funkce  $\tilde{g} := \frac{g}{\int g}$  již ano.

*Důkaz.* Definujme  $\tilde{g}$  a  $\tilde{h}$  jako v poznámce. Potom musí existovat verze  $\tilde{g}, \tilde{h} \geq 0$  měřitelná. Zbytek dostaneme z předchozí věty.  $\square$

konec 7. přednášky (10.3.2025)