Pravděpodobnost a matematická statistika (NMSA202)

Petr Velička *
přednášející: doc. RNDr. Michal Pešta, Ph.D. †

LS 2024/25

*petrvel@matfyz.cz
†pesta@karlin.mff.cuni.cz

1 Náhodné jevy

Začneme nejdříve základními definicemi, bez nichž vůbec nemůžeme mluvit o pravděpodobnosti.

Definice 1.1. *Výběrovým prostorem* rozumíme množinu Ω všech možných výsledků nějakého experimentu. Prvky $\omega \in \Omega$ této množiny nazýváme *elementárními jevy*. Podmnožině $A \subset \Omega$ říkáme *(náhodný) jev*.

Pro ilustraci uvedeme následující motivační příklad, kde podrobně popíšeme souvislosti s právě zadefinovanými pojmy.

Příklad 1.2. Házíme dvakrát férovou mincí. Naším výběrovým prostorem bude množina $\Omega = \{PP, PO, OP, OO\}$. Událost, že první hod je panna, je tedy $A = \{PP, PO\}$. V tomto zápise písmeno P odpovídá tomu, že padla panna, kdežto písmeno O odpovídá orlu.

Dále uvažujme jevy H_1 – při prvním hodu padne panna, a H_2 – při druhém hodu padne panna. Nechť jsou všechny výsledky stejně pravděpodobné (jinými slovy, mince je férová), potom pravděpodobnost, že padne alespoň jedna panna (tj. nastane jev $H_1 \cup H_2$) je $\frac{3}{4}$.

Důkaz. Zřejmě z předchozího máme $H_1 = \{PP, PO\}$ a $H_2 = \{OP, PP\}$. Pravděpodobnost spočteme jako podíl velikosti $|H_1 \cup H_2| = 3$ a velikosti celého prostoru $|\Omega| = 4$. $\square$

Tato jednoduchá intuice však selže v případě nekonečné (nespočetné) množiny Ω, neboť jak již čtenář jistě ví z přednášky základů teorie míry, na nespočetné množině neexistuje "rozumný" způsob, jak měřit množiny. Musíme proto pracovat pouze s jistou třídou podmnožin Ω, které budeme říkat σ-algebra.

Definice 1.3. Nechť $\Omega \neq \emptyset$ je množina a $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ soubor jejích podmnožin. Této množině $\mathcal{A}$ říkáme σ-algebra, jestliže jsou splněny následující podmínky:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) Pokud $A \in \mathcal{A}$, pak $A^C := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) Pokud $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, pak $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$.

Dvojici $(\Omega, \mathcal{A})$ nazýváme *měřitelný prostor*.

Každé události $A \in \mathcal{A}$ přiřadíme číslo $\mathbb{P}(A)$, které nazýváme *pravděpodobnost* jevu A. Jelikož chceme, aby se zachovala intuice z předchozího příkladu, musíme tuto představu náležitým způsobem formalizovat.

Definice 1.4. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Zobrazení $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ nazýváme *pravděpodobnostní mírou (pravděpodobností)*, jestliže:

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) Pro libovolné po dvou disjunktní měřitelné množiny $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ platí $P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$.

Trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nazýváme *pravděpodobnostní prostor.*

Přímo z této definice již můžeme odvodit pár základních vlastností pravděpodobnosti, se kterými dále budeme pracovat. Ve všech následujících tvrzeních pracujeme s pravděpodobnostním prostorem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pozorování 1.5. ***(Základní vlastnosti pravděpodobnostní míry)*** *Pro výše jmenovaný pravděpodobnostní prostor platí následující tvrzení:*

1. $P(\emptyset) = 0$,
2. *Pro* $A, B \in \mathcal{A}$ *disjunktní platí* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. *Pro* $A \in \mathcal{A}$ *platí* $P(A^C) = 1 - P(A)$,
4. *Pro* $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$ *platí* $P(A) \leq P(B)$.

Důkaz.

1. Uvažujme posloupnost $A_1 = \Omega, A_2 = A_3 = \cdots = \emptyset$. Potom z vlastnosti (ii) z definice máme, že $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \dots) = P(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset)$. Tedy $\sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$, což může nastat pouze v případě $P(\emptyset) = 0$ (jde o součet nekonečně mnoha nezáporných čísel).
2. Nechť $A_1 = A, A_2 = B, A_i = \emptyset$ pro $i > 2$. Tvrzení plyne přímo z vlastnosti (ii) z definice pravděpodobnostní míry a již dokázané vlastnosti 1.
3. $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$. Tato rovnost platí, neboť množina je vždy disjunktní se svým komplementem.
4. $P(B) = P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$. Jelikož funkce P je nezáporná, snadno vidíme, že $P(B) \geq P(A)$.

□

Lemma 1.6. ***(Pravděpodobnost sjednocení)*** *Pro libovolné* $A, B \in \mathcal{A}$ *platí* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Důkaz. Rozepíšeme $A \cup B = (A \cap B^C) \cup (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$. Tyto tři množiny jsou zřejmě po dvou disjunktní. Dále díky aditivitě pravděpodobnosti máme $P(A \cup B) = P(A \cap B^C) + P(A \cap B) + P(A^C \cap B) + P(A \cap B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. □

Věta 1.7. ***(Spojitost pravděpodobnosti)*** *Buď* $A_n \uparrow A$ *nebo* $A_n \downarrow A$ *pro* $A_n, A \in \mathcal{A}$. *Potom platí* $P(A_n) \to P(A)$.

Důkaz. Nechť $A_n \uparrow A$. Potom z definice $A_1 \subset A_2 \dots$ a platí $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Definujme posloupnost B_n: $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$. Potom B_i jsou po dvou disjunktní a platí $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Zřejmě také platí $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Pak $P(A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$. Z toho již můžeme odvodit $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = P(A)$.

Případ klesající A_n se dokáže analogicky, stačí uvažovat $C_n = A_n^C$. □

konec 1. přednášky (17.2.2025)