

Pravděpodobnost a matematická statistika (NMSA202)

Petr Velička *

přednášející: doc. RNDr. Michal Pešta, Ph.D. †

LS 2024/25

*petrvel@matfyz.cz

†pesta@karlin.mff.cuni.cz

1 Náhodné jevy

Začneme nejdříve základními definicemi, bez nichž vůbec nemůžeme mluvit o pravděpodobnosti.

Definice 1.1. *Výběrovým prostorem* rozumíme množinu Ω všech možných výsledků nějakého experimentu. Prvky $\omega \in \Omega$ této množiny nazýváme *elementárními jevy*. Podmnožině $A \subset \Omega$ říkáme (*náhodný*) *jev*.

Pro ilustraci uvedeme následující motivační příklad, kde podrobně popíšeme souvislosti s právě zadanými pojmy.

Příklad 1.2. Házíme dvakrát férovou mincí. Naším výběrovým prostorem bude množina $\Omega = \{PP, PO, OP, OO\}$. Událost, že první hod je panna, je tedy $A = \{PP, PO\}$. V tomto zápise písmeno P odpovídá tomu, že padla panna, kdežto písmeno O odpovídá orlu.

Dále uvažujme jevy H_1 – při prvním hodu padne panna, a H_2 – při druhém hodu padne panna. Necht jsou všechny výsledky stejně pravděpodobné (jinými slovy, mince je férová), potom pravděpodobnost, že padne alespoň jedna panna (tj. nastane jev $H_1 \cup H_2$) je $\frac{3}{4}$.

Důkaz. Zřejmě z předchozího máme $H_1 = \{PP, PO\}$ a $H_2 = \{OP, PP\}$. Pravděpodobnost spočteme jako podíl velikosti $|H_1 \cup H_2| = 3$ a velikosti celého prostoru $|\Omega| = 4$. \square

Tato jednoduchá intuice však selže v případě nekonečné (nespočetné) množiny Ω , neboť jak již čtenář jistě ví z přednášky základů teorie míry, na nespočetné množině neexistuje “rozumný” způsob, jak měřit množiny. Musíme proto pracovat pouze s jistou třídou podmnožin Ω , které budeme říkat σ -algebra.

Definice 1.3. Necht $\Omega \neq \emptyset$ je množina a $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ soubor jejích podmnožin. Této množině \mathcal{A} říkáme σ -algebra, jestliže jsou splněny následující podmínky:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- (ii) Pokud $A \in \mathcal{A}$, pak $A^C := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,
- (iii) Pokud $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, pak $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Dvojici (Ω, \mathcal{A}) nazýváme *měřitelný prostor*.

Každé události $A \in \mathcal{A}$ přiřadíme číslo $\mathbb{P}(A)$, které nazýváme *pravděpodobnost* jevu A . Jelikož chceme, aby se zachovala intuice z předchozího příkladu, musíme tuto představu náležitým způsobem formalizovat.

Definice 1.4. Necht (Ω, \mathcal{A}) je měřitelný prostor. Zobrazení $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ nazýváme *pravděpodobnostní mírou* (*pravděpodobností*), jestliže:

- (i) $P(\Omega) = 1$,
- (ii) Pro libovolné po dvou disjunktní měřitelné množiny $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ platí $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Trojici (Ω, \mathcal{A}, P) nazýváme *pravděpodobnostní prostor*.

Přímo z této definice již můžeme odvodit pár základních vlastností pravděpodobnosti, se kterými dále budeme pracovat. Ve všech následujících tvrzeních pracujeme s pravděpodobnostním prostorem (Ω, \mathcal{A}, P) .

Pozorování 1.5 (Základní vlastnosti pravděpodobnostní míry). *Pro výše jmenovaný pravděpodobnostní prostor platí následující tvrzení:*

1. $P(\emptyset) = 0$,
2. Pro $A, B \in \mathcal{A}$ disjunktní platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. Pro $A \in \mathcal{A}$ platí $P(A^C) = 1 - P(A)$,
4. Pro $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$ platí $P(A) \leq P(B)$.

Důkaz. 1. Uvažujme posloupnost $A_1 = \Omega, A_2 = A_3 = \dots = \emptyset$. Potom z vlastnosti (ii) z definice máme, že $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \dots) = P(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset)$. Tedy $\sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$, což může nastat pouze v případě $P(\emptyset) = 0$ (jde o součet nekonečně mnoha nezáporných čísel).

2. Necht $A_1 = A, A_2 = B, A_i = \emptyset$ pro $i > 2$. Tvrzení plyne přímo z vlastnosti (ii) z definice pravděpodobnostní míry a již dokázané vlastnosti 1.
3. $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$. Tato rovnost platí, neboť množina je vždy disjunktní se svým komplementem.
4. $P(B) = P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$. Jelikož funkce P je nezáporná, snadno vidíme, že $P(B) \geq P(A)$.

□

Lemma 1.6 (Pravděpodobnost sjednocení). *Pro libovolné $A, B \in \mathcal{A}$ platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.*

Důkaz. Rozepíšeme $A \cup B = (A \cap B^C) \cup (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$. Tyto tři množiny jsou zřejmě po dvou disjunktní. Dále díky aditivitě pravděpodobnosti máme $P(A \cup B) = P(A \cap B^C) + P(A \cap B) + P(A^C \cap B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. □

Věta 1.7 (Spojitost pravděpodobnosti). *Bud $A_n \uparrow A$ nebo $A_n \downarrow A$ pro $A_n, A \in \mathcal{A}$. Potom platí $P(A_n) \rightarrow P(A)$.*

Důkaz. Necht $A_n \uparrow A$. Potom z definice $A_1 \subset A_2 \dots$ a platí $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Definujme posloupnost B_n : $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Potom B_i jsou po dvou disjunktní a platí $A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$. Zřejmě také platí $A \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Pak $P(A_n) = P(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i)$. Z toho již můžeme odvodit $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = P(A)$.

Případ klesající A_n se dokáže analogicky, stačí uvažovat $C_n = A_n^C$. □

konec 1. přednášky (17.2.2025)

Uvedeme si ještě jeden příklad ilustrující intuitivní chápání pravděpodobnosti a zavedeme první takzvané pravděpodobnostní rozdělení. Uvažujme případ, že prostor Ω je konečný. Necht všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné, pak platí

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

V tomto případě mluvíme o *rovnoměrném rozdělení pravděpodobnosti*.

Příklad 1.8 (Hod dvěma kostkami). Výběrový prostor $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1 \dots 6\}\}$ má 36 prvků. Jestliže všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné, pak platí $P(A) = \frac{|A|}{36}$. Například, pravděpodobnost toho, že součet na kostkách je přesně 11, je $2/36$, protože pouze dva výsledky $(5, 6)$ a $(6, 5)$ odpovídají této události.

V praxi často chceme odlišit, zda pravděpodobnost výskytu jedné události nějakým způsobem závisí na výskytu jiné události. K tomu nám poslouží pojem nezávislosti jevů.

Definice 1.9. Dvě události $A, B \in \mathcal{A}$ jsou *nezávislé*, jestliže platí $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Obdobně, množina událostí $\{A_i : i \in I\}$ (kde indexová množina I je nejvýše spočetná) je *nezávislá*, jestliže platí

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

pro každou konečnou podmnožinu $J \subset I$.

Je důležité si uvědomit, že disjunktní události s kladnou pravděpodobností nejsou nezávislé (neboť součin jejich pravděpodobností není roven 0 – pravděpodobnost výskytu jejich prázdného průniku). Obecně se pracuje se dvěma typy nezávislosti – předpokládanou (plyne z podstaty zkoumané úlohy) a odvozenou (dokázaná pomocí jiných vlastností úlohy). Následující příklad ilustruje praktické použití právě zavedeného pojmu.

Příklad 1.10. Házíme férovou mincí 10krát. Necht A je událost “padla aspoň jedna panna”. Pak platí $P(A) = 1 - (1/2)^{10}$.

Důkaz. Necht T_j je událost, že při j -tém hodu padne orel. Můžeme psát $P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - P(\text{samé orly}) = 1 - P(T_1 \cap \dots \cap T_{10})$. Dále díky nezávislosti (v tomto případě jde o nezávislost předpokládanou) jevů T_j máme $1 - P(T_1 \cap \dots \cap T_{10}) = 1 - P(T_1) \cdot \dots \cdot P(T_{10}) = 1 - (1/2)^{10} \approx 0.999$. \square

Dalším silným nástrojem v teorii pravděpodobnosti je podmíněná pravděpodobnost, která nám poskytuje odpověď na otázku “Pokud vím, že nastala událost B , jaká je pravděpodobnost události A ?”.

Definice 1.11. Mějme jevy $A, B \in \mathcal{A}$. Pokud $P(B) > 0$, pak *podmíněná pravděpodobnost* A za podmínky B je definována vztahem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Poznamenejme si několik základních vlastností podmíněné pravděpodobnosti, jejichž důkaz snadno plyne z příslušných definic.

Pozorování 1.12 (Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti).

- (i) Pro pevné $B \in \mathcal{A}, P(B) > 0$ je $P(\cdot|B)$ pravděpodobnostní míra.
- (ii) Obecně platí $P(A|B) \neq P(B|A)$, platí totiž $P(A|B) = P(B|A) \frac{P(A)}{P(B)}$ (pokud obě strany rovnosti dávají smysl).
- (iii) Události A a B jsou nezávislé právě tehdy, když $P(A|B) = P(A)$ (předpokládáme nenulovost $P(B)$).
- (iv) $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$ v případě, že $P(A)P(B) > 0$.

Důkaz. Vlastnosti (iii) a (iv) plynou přímo z definice vynásobením vhodnou konstantou.

Vlastnost (ii) se dokáže následujícím protipříkladem, uvažujme hod dvěma férovými mincemi. Nechť H_1 je událost “padla aspoň jedna panna” a H_2 událost “padly dvě panny”. Potom $P(H_1|H_2) = 1$ ale $P(H_2|H_1) = \frac{1}{3}$. Důkaz obecného vztahu je ponechán čtenáři jako snadné (ale užitečné) cvičení.

Nakonec, vlastnost (i) je důsledkem toho, že pro libovolnou množinu $A \in \mathcal{A}$ je $A \cap B$ měřitelná, a navíc pro libovolný systém po dvou disjunktních množin $A_i, i \in \mathbb{N}$ platí $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \frac{1}{P(B)} P((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B) = \frac{1}{P(B)} P(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)) = \frac{1}{P(B)} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$. \square

Použití podmíněné pravděpodobnosti v praxi však někdy může vést k neintuitivním výsledkům, které ilustruje následující příklad.

Příklad 1.13. Uvažujme nemoc D a test, který má dva možné výsledky. Pravděpodobnosti výsledků tohoto testu jsou uvedeny v následující tabulce. Zde sloupce odpovídají přítomnosti/absenci nemoci a řádky výsledkům testu.

	D	D^C
+	0.009	0.099
−	0.001	0.891

Z definice spočteme následující podmíněné pravděpodobnosti:

$$P(+|D) = \frac{P(+ \cap D)}{P(D)} = \frac{0.009}{0.009 + 0.001} = 0.9.$$

$$P(-|D^C) = \frac{P(- \cap D^C)}{P(D^C)} = \frac{0.891}{0.891 + 0.099} \approx 0.9.$$

Vychází nám, že test je docela přesný, neboť nemocní lidé mají test v 90% případů pozitivní, stejně tak zdraví lidé jsou v 90% případů negativní.

Dále předpokládejme, že pacient šel na test a získal pozitivní výsledek. Spočteme, s jakou pravděpodobností je opravdu nakažený.

$$P(D|+) = \frac{P(D \cap +)}{P(+)} = \frac{0.009}{0.009 + 0.099} \approx 0.08.$$

Vyšlo nám, že na první pohled zdánlivě precizní test ve skutečnosti má méně než 10% úspěšnost. Jedním z důvodů této diskrepance může být například velký nepoměr zdravých lidí vůči nakaženým (pouze jedno procento) ve zdrojových datech, což je jev který se obecně vyskytuje u většiny nemocí. V praxi se proto často pracuje s domněnkami – například testujeme jen pacienty, kteří vykazují nějaké symptomy apod.

Na závěr uvedeme dvě velmi užitečné věty, které se často používají v nej-různějších úlohách a týkají se podmíněné pravděpodobnosti. Zformulujeme je pro spočetné rozklady, ale obdobná tvrzení platí i pro konečné rozklady s velmi podobným důkazem.

Věta 1.14 (Zákon úplné pravděpodobnosti). *Nechť A_1, A_2, \dots je spočetný disjunkttní rozklad Ω takový, že $P(A_i) > 0$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Potom pro libovolnou událost $B \in \mathcal{A}$ platí:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i).$$

Důkaz. Definujme posloupnost množin $C_i = B \cap A_i$ pro $i \in \mathbb{N}$. Zjevně $\{C_i, i \in \mathbb{N}\}$ je disjunkttní pokrytí B . Potom $P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)$. \square

Věta 1.15 (Bayes). *Nechť A_1, A_2, \dots je spočetný disjunkttní rozklad Ω takový, že $P(A_i) > 0$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Mějme událost $B \in \mathcal{A}$ s nenulovou pravděpodobností. Potom platí:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Důkaz. Příímým výpočtem dostáváme

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)},$$

kde poslední rovnost získáme aplikací *Věty 1.14*. \square

Použití Bayesovy věty si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 1.16. Uvažujme e-mailovou schránku. Máme tři kategorie e-mailů: A_1 – spam, A_2 – nízká priorita, A_3 – vysoká priorita. Na základě předchozích zkušeností víme, že $P(A_1) = 0.7$, $P(A_2) = 0.2$, $P(A_3) = 0.1$. Nechť B je událost, že daný e-mail obsahuje slovo “zdarma”. Platí $P(B|A_1) = 0.9$, $P(B|A_2) =$

0.01, $P(B|A_3) = 0.01$ ¹. Jaká je pravděpodobnost, že příchozí e-mail obsahující slovo “zdarma” je spam?

Přímým výpočtem z Bayesovy věty získáme

$$P(A_1|B) = \frac{0.9 \cdot 0.7}{0.9 \cdot 0.7 + 0.01 \cdot 0.2 + 0.01 \cdot 0.1} = 0.995.$$

Tedy pravděpodobnost, že tento e-mail je spam je přes 99%!

Věta 1.17 (O postupném podmiňování). *Nechť $\{A_i\}_{i=1}^n$ jsou náhodné jevy takové, že $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) > 0$. Pak platí*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1).$$

Důkaz. Dokazujeme indukcí podle počtu náhodných jevů. Z definice podmíněné pravděpodobnosti víme, že $P(A_2 \cap A_1) = P(A_2|A_1)P(A_1)$. Dále

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(A_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) = P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right),$$

čímž je důkaz ukončen. □

¹Tyto hodnoty se nutně nemusí sečíst na 1

2 Náhodné veličiny

V této kapitole se budeme věnovat náhodným veličinám, což bude formalizovat (a zobecňovat) jakýsi intuitivní chápání toho, že nějaká proměnná nabývá různých hodnot s určitými pravděpodobnostmi. Začneme ústřední definicí celé statistiky – náhodnou veličinou.

Definice 2.1. Necht (Ω, \mathcal{A}) je měřitelný prostor. *Náhodná veličina* je měřitelné zobrazení, které přiřazuje každému výsledku ω reálné číslo $X(\omega)$. Jinými slovy, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \forall x \in \mathbb{R}$.

konec 2. přednášky (18.2.2025)

Úmluva 2.2. Zavedeme značení $[X \in B] = \{\omega : X(\omega) \in B\}$, $[X \leq a] = \{\omega, X(\omega) \leq a\}$. Platí tedy $[X \in B], [X \leq a] \in \mathcal{A}$ pro všechna $B \in \mathcal{B}$, $a \in \mathbb{R}$. Jde o náhodné jevy a jsou tedy dobře definované jejich pravděpodobnosti $P[X \in B], P[X \leq a]$.

Příklad 2.3. Házíme mincí desetkrát. Necht $X(\omega)$ je počet orlů v posloupnosti ω . Jestliže $\omega = O O P O O P O O P P$ (kde O je orel a P je panna), platí $X(\omega) = 6$.

V předchozí kapitole jsme mluvili o pravděpodobnostním rozdělení, je na čase tento pojem formálně zdefinovat.

Definice 2.4. *Rozdělením náhodné veličiny* $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nazýváme indukovanou pravděpodobnostní míru P_X na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definovanou jako

$$P_X(B) := P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Máme tedy jakýsi obraz míry P v zobrazení P_X čímž se (Ω, \mathcal{A}, P) zobrazí na pravděpodobnostní prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$. V opačném směru můžeme použít takzvané kanonické vnoření do prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$, kde naší zvolenou měřitelnou funkcí bude identita, tedy není potřeba se bát, že by příslušný prostor nemusel existovat. Následující věta říká, že nezáleží ve kterém z těchto dvou prostorů integrujeme libovolnou funkci.

Věta 2.5 (O přenosu integrace). *Bud' g měřitelná funkce na měřitelném prostoru $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ a $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{M}, \mathcal{M})$. Necht P_X je míra na \mathcal{M} indukovaná zobrazením X , tedy $P_X(M) = P[X^{-1}(M)]$ pro $M \in \mathcal{M}$. Potom, je-li aspoň jedna strana definována, platí*

$$\int_{\Omega} g[X(\omega)] dP(\omega) = \int_{\mathbb{M}} g(x) dP_X(x).$$

Důkaz. Důkaz této věty je poměrně technický, hlavní ideou je “klasický” postup z teorie míry postupným důkazem nejdříve pro charakteristickou funkci, poté pro jednoduchou měřitelnou (nabývající jen konečně mnoha hodnot), pak pro nezápornou měřitelnou a na závěr pro obecnou měřitelnou funkci.

Nechť $g = \chi_B, B \in \mathcal{M}$. Tedy $g(X(\omega)) = 1$ pro $X(\omega) \in B$ (a všude jinde nulová), tedy pro $\omega \in X^{-1}(B)$. Potom máme

$$\int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{X^{-1}(B)} dP(\omega) = P[X^{-1}(B)].$$

Pro pravou stranu máme

$$\int_{\mathbb{M}} g(x) dP_X(x) = \int_B dP_X(x) = P_X(B) = P[X^{-1}(B)].$$

Dále necht g je jednoduchá měřitelná, tedy $g(\cdot) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{B_k}(\cdot)$ pro $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{R}$ a $B_k \in \mathcal{M}$ pro všechna k . Z linearity integrálu plyne (vytkneme sumu) $\int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{X^{-1}(B)} dP(\omega) = P[X^{-1}(B)]$.

Je-li g nezáporná měřitelná, potom existuje posloupnost g_n jednoduchých měřitelných funkcí takových, že $g_n \nearrow g$. Potom dle Léviho věty o monotonní konvergenci máme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g[X(\omega)] dP(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n[X(\omega)] dP(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{M}} g_n(x) dP_X(x) = \int_{\mathbb{M}} g(x) dP_X(x), \end{aligned}$$

kde třetí rovnost plyne z již dokázané části pro jednoduché měřitelné funkce.

Nakonec, pro g měřitelnou existuje rozklad $g = g^+ - g^-$ takový, že g^+, g^- jsou nezáporné měřitelné, tedy požadované tvrzení plyne z části pro nezáporné měřitelné funkce. \square

Na závěr poznamenejme, že se nám budou obzvlášť hodit volby $(\mathbb{M}, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ pro $n \geq 1$.

Připomeňme si, že jsou-li μ, ν dvě σ -konečné míry na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ a je-li $\nu \ll \mu$ (tedy $\mu(B) = 0$ implikuje $\nu(B) = 0$), potom z Radonovy-Nikodymovy věty plyne existence nezáporné měřitelné funkce f takové, že $\nu(B) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu$ pro všechna $B \in \mathcal{B}$. Této funkci f říkáme Radonova-Nikodymova derivace a píšeme $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. Taková funkce f je navíc určena jednoznačně až na množinu μ -míry 0.

Využijeme těchto poznatků tak, že zvolíme vhodnou referenční míru na \mathbb{R} a rozdělení P_X pak bude popsáno právě zavedenou Radonovou-Nikodymovou derivací. Vhodné referenční míry jsou např.

- Lebesgueova míra λ ,
- Čítací míra na spočetné podmnožině \mathbb{R} , platí $\mu_S(B) = |B \cap S|$ kde S je nejvýše spočetná podmnožina \mathbb{R} .

Definice 2.6. Buď X náhodná veličina a P_X její rozdělení. Necht P_X je absolutně spojitě vůči μ , kde μ je σ -konečná míra na \mathbb{R} . Pak funkci f_X splňující $P_X(B) = \int_B f_X d\mu$ pro všechny $B \in \mathcal{B}$ nazveme *hustotou* rozdělení náhodné veličiny X vůči míře μ .

Je třeba si dát pozor na to, aby zvolená referenční míra opravdu byla absolutně spojitá, například při hodu kostkou má výsledek 1 nenulovou pravděpodobnost, ale $\lambda(\{1\}) = 0$.

Věta 2.7. *Buď X náhodná veličina a P_X její rozdělení. Je-li f_X hustota (rozdělení) vůči σ -konečné míře μ , pak*

$$P[X \in B] = \int_B f_X d\mu.$$

Důkaz. Jde o přímý důsledek Radonovy-Nikodymovy věty a vztahu mezi P_X a P . \square

Další funkcí, která plně charakterizuje rozdělení náhodné veličiny je tzv. distribuční funkce.

Definice 2.8. Buď X náhodná veličina na (Ω, \mathcal{A}, P) a P_X její rozdělení. *Distribuční funkce F_X náhodné veličiny X je definována vztahem*

$$F_X(a) := P((-\infty, a]) = P[X \leq a].$$

Uvedeme si několik užitečných vlastností distribučních funkcí:

Důsledek 2.9 (Základní vlastnosti distribučních funkcí).

- (i) *Distribuční funkce jednoznačně určuje rozdělení (jinými slovy, $F_X = F_Y$ implikuje $P_X = P_Y$).*
- (ii) *Různé náhodné veličiny mohou mít stejné distribuční funkce, tedy stejné rozdělení.*

konec 3. přednášky (24.2.2025)

Příklad 2.10. Hodíme dvěma kostkami, označme Y počet sudých čísel na těchto dvou kostkách. Potom $Y \in \{0, 1, 2\}$. Z definice $F_Y(a) = P[Y \leq a]$, tedy

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq a < 1, \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq a < 2, \\ 1, & a \geq 2. \end{cases}$$

Dále, z toho, že $P_Y(0) = \frac{1}{4} > 0$, plyne, že míra P_Y není absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře λ , tedy musíme uvažovat čítací míru $\mu_{\mathbb{Z}}$ na množině celých čísel. Potom hustota f_Y má následující tvar:

$$f_Y(a) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & a = 0, \\ \frac{1}{2}, & a = 1, \\ \frac{1}{4}, & a = 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vidíme, že hustota odpovídá skokům distribuční funkce v daném bodě. V následující větě uvedeme charakterizaci distribučních funkcí.

Věta 2.11 (Charakterizace distribučních funkcí). *Buď X náhodná veličina a F_X její distribuční funkce. Pak*

- (i) F_X je neklesající;
- (ii) $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = 0$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} F_X(a) = 1$;
- (iii) F_X je zprava spojitá.

Navíc, každá funkce F splňující body (i)-(iii) z této věty je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny.

Důkaz. Dokážeme pouze implikaci o vlastnostech distribuční funkce, opačná implikace (existuje rozdělení) vyžaduje pokročilý matematický aparát z analýzy a teorie míry, který prozatím postrádáme.

- (i) $F_X(a) = P[X \leq a]$. Bez újmy na obecnosti nechť $b > a$. Potom $F_X(b) = P[X \leq b] = P([X \leq a] \cup [a < X \leq b]) = P[X \leq a] + P[a < X \leq b]$ z aditivní míry, druhý sčítanec je nezáporný, tedy dostáváme požadované tvrzení.
- (ii) Platí $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X \in (-\infty, -n]] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X \in A_n] = 0$. Poslední rovnost platí ze spojitosti míry (Věta 1.7), neboť platí $A_n \searrow \emptyset$. Obdobně se ukáže tvrzení pro $a \rightarrow +\infty$ (cvičení).
- (iii) Stačí uvažovat posloupnost $a_n = a + \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Požadované tvrzení opět plyne z věty o spojitosti míry.

□

Pro každou funkci F splňující vlastnosti z předchozí věty existuje míra μ_F na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ určená vztahem $\mu_F((-\infty, a]) = F(a)$ pro všechna a . Tato míra je konečná a platí $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$.

Definice 2.12 (Rozklad pravděpodobnostního rozdělení). Každou pravděpodobnostní míru P_X můžeme rozdělit na tři složky $P_X = P_{X_{as}} + P_{X_{ds}} + P_{X_{sg}}$, kde $P_{X_{as}}$ je absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře λ , $P_{X_{ds}}$ (diskrétní spojitá) je absolutně spojitá vůči číselní míře μ na nějaké spočetné podmnožině \mathbb{R} a nakonec $P_{X_{sg}}$ (singulární) není absolutně spojitá vůči λ ani ji nelze napsat jako spočetnou kombinaci Diracových měr δ_x .

Příkladem singulární distribuční funkce je například integrál takzvaného Cantorova diskontinua. Obecně taková rozdělení nemají “hezké” vlastnosti, proto s nimi již nebudeme pracovat.

Definice 2.13. Náhodnou veličinu X nazveme *diskrétní*, jestliže existují $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$, $\{x_i\}_{i \in I}$ a $\{p_i \in (0, 1]\}_{i \in I}$ takové že $P[X \in B] = \sum_{i, x_i \in B} p_i$ pro všechny borelovské B .

Platí $P[X = x_i] = p_i$ a $\sum_{i \in I} p_i = 1$. Rozdělením takové veličiny je funkce $P_X = \sum_{i \in I} p_i \delta_{x_i}$, kde δ_u je Diracova míra v bodě u . Toto rozdělení je absolutně spojitě vůči číselní míře na $S = \{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$. Potom funkce $f_X(u) := \begin{cases} p_i, u = x_i, \\ 0, \text{ jinak} \end{cases}$ je hustotou (občas také pravděpodobnostní funkcí) zkoumaného rozdělení.

Definice 2.14. Náhodná veličina X se nazývá (*absolutně*) *spojitá*, pokud její rozdělení P_X je absolutně spojitě vůči Lebesgueově míře λ .

Pro spojitou náhodnou veličinu X vždy existuje hustota f_X (nezáporná a jednoznačná až na množinu λ -míry 0) splňující $P[X \in B] = \int_B f_X(t) dt$ a speciálně $F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t) dt$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$. Taková F_X má derivaci ve skoro všech bodech a platí $F'_X(a) = f_X(a)$ pro s.v. a . Analogicky pro diskrétní náhodnou veličinu Y je hustota funkcí, která nabývá v bodě a hodnoty distribuční funkce v daném bodě.

Ne každá veličina, se kterou se běžně setkáme je ryze spojitá nebo ryze diskrétní. Příkladem veličiny, která má obě složky nenulové, je například úhrn denních srážek, s nenulovou pravděpodobností nenaprší vůbec, ale když už začne pršet, úhrn srážek je spojitá náhodná veličina.

Lemma 2.15. *Nechť F_X je distribuční funkce náhodné veličiny X . Pak pro $a < b$ platí*

- (i) $P[a < X \leq b] = P[X \in (a, b)] = F_X(b) - F_X(a)$,
- (ii) $P[X > a] = 1 - F_X(a)$,
- (iii) $P[X = a] = F_X(a) - F_X(a^-)$, kde $F_X(a^-)$ je limita zleva $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(a - h)$ a odtud $P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a^-)$.
- (iv) pro spojitou náhodnou veličinu platí $P[a \leq X \leq b] = P[a \leq X < b] = P[a < X \leq b] = P[a < X < b] = F_X(b) - F_X(a)$.

Důkaz. Důkaz je jednoduchý, plyne z příslušných definic. Uvedeme např. důkaz pro bod (iii).

$$P[X = a] = \lim_{h \rightarrow 0^+} P[a - h < X \leq a] = F_X(a) - \lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(a - h). \quad \square$$

konec 4. přednášky (25.2.2025)

Dalším užitečným pojmem je funkce inverzní k distribuční funkci, které běžně říkáme kvantil.

Definice 2.16. Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí F . *Inverzní distribuční funkce* neboli *kvantilová funkce* je definována jako

$$F^{-1}(q) = \inf \{x : F(x) > q\}$$

pro $q \in (0, 1)$. Hodnoty F^{-1} ve speciálních bodech mají své vlastní názvy:

- $F^{-1}(\frac{1}{4})$ je *první kvartil*,

- $F^{-1}(\frac{1}{2})$ je *medián*,
- $F^{-1}(\frac{3}{4})$ je *třetí kvartil*.

Je-li F ryze rostoucí a spojitá, je $F^{-1}(q)$ to jediné $x \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = q$, jinými slovy, F je bijekce z \mathbb{R} do $(0, 1)$. Takto definovaná kvantilová funkce je neklesající a zprava spojitá. Dále z F^{-1} můžeme jednoznačně určit F , tedy také charakterizuje rozdělení P_X . Nakonec, o dvou náhodných veličinách X a Y říkáme, že jsou stejně rozdělené, zapisujeme $X \stackrel{d}{=} Y$, právě tehdy, když $F_X(x) = F_Y(x)$ pro všechna x . To však neznamena, že $X = Y$.

Ukážeme si několik užitečných příkladů rozdělení (diskrétních a později i spojitých). Tato rozdělení se používají v praxi při modelování jednoduchých systémů, ale u komplikovanějších modelů se s těmito rozděleními bohužel nevystačíme.

2.1 Diskrétní náhodné veličiny

Definice 2.17 (Bodové rozdělení). Náhodná veličina X má *bodové rozdělení* v bodě a právě tehdy, když $P[X = x] = \chi_{\{x=a\}}, x \in \mathbb{R}$. Zapisujeme $X \sim \delta_a$. Potom platí $F_X(x) = \chi_{\{x \geq a\}}$.

Definice 2.18 (Diskrétní rovnoměrné rozdělení). Náhodná veličina X má *diskrétní rovnoměrné rozdělení* na $\{1, \dots, k\}$ právě tehdy, když

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/k, & x = 1, \dots, k; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definice 2.19 (Bernoulliho rozdělení). Náhodná veličina X má *Bernoulliho rozdělení* s parametrem $p \in (0, 1)$ právě tehdy, když $f_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}$ pro $x \in 0, 1$. Zapisujeme $X \sim \text{Alt}(p)$ nebo $X \sim \text{Be}(p)$. Tímto rozdělením modelujeme jevy, u kterých jsou pouze dva možné výsledky (úspěch/neúspěch, hod mincí).

Definice 2.20 (Binomické rozdělení). Náhodná veličina X má *binomické rozdělení* s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0, 1)$ právě tehdy, když

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \chi_{\{x \in \{0, \dots, n\}\}}.$$

Zapisujeme $X \sim \text{Bi}(n, p)$. Používáme toto v případě sčítaně nezávislých² veličin s Bernoulliho rozdělením (počet úspěchů mezi n pokusy).

Definice 2.21 (Geometrické rozdělení). Náhodná veličina X má *geometrické rozdělení* s parametrem $p \in (0, 1)$ (zapisujeme $X \sim \text{Geo}(p)$) právě tehdy, když

$$f_X(x) = p(1-p)^x$$

pro $x \in \mathbb{N}_0$. Taková náhodná veličina vyjadřuje počet neúspěchů před prvním úspěchem v posloupnosti nezávislých pokusů.

²Přesná definice nezávislých veličin bude uvedena později.

Definice 2.22 (Negativně binomické rozdělení). Náhodná veličina X má *negativně binomické rozdělení* s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0, 1)$ (píšeme $X \sim NB(n, p)$), jestliže platí

$$f_X(x) = \binom{n+x-1}{n-1} p^n (1-p)^x$$

pro $x \in \mathbb{N}_0$. Rozdělení vyjadřuje počet neúspěchů před n -tým úspěchem v posloupnosti nezávislých pokusů. Specifický případ $NB(1, p) = Geo(p)$.

Definice 2.23 (Poissonovo rozdělení). Náhodná veličina X má *Poissonovo rozdělení* s parametrem $\lambda > 0$ (zapisujeme $X \sim Po(\lambda)$) právě tehdy, když

$$f_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

pro $x \in \mathbb{N}_0$. Jestliže $X \sim Po(\lambda_X)$ a $Y \sim Po(\lambda_Y)$ jsou nezávislé, potom $X + Y \sim Po(\lambda_X + \lambda_Y)$. Jestliže $n \rightarrow \infty$ a $np \rightarrow \lambda < \infty$, potom $Bi(n, p)$ konverguje k $Po(\lambda)$.

2.2 Absolutně spojité náhodné veličiny

Definice 2.24 (Spojitě rovnoměrné rozdělení). Náhodná veličina X má *rovnoměrné rozdělení* na intervalu $[a, b]$ právě tehdy, když $f_X(x) = (b-a)^{-1} \chi_{\{x \in [a, b]\}}$. Zapisujeme $X \sim U(a, b)$ (uniform) nebo $X \sim R(a, b)$ (rovnoměrné).

Definice 2.25 (Normální rozdělení). Náhodná veličina X má *normální (Gaussovo) rozdělení* s parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ (zapisujeme $X \sim N(\mu, \sigma^2)$) právě tehdy, když

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

Toto rozdělení je enormně důležité, uvedeme si proto několik jeho vlastností. Nejprve, máme-li $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potom $Z := (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$. Tomuto rozdělení říkáme *standardní normální rozdělení*. Dále, máme-li dvě nezávislé normálně rozdělené veličiny $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, potom $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$.

Distribuční funkce $N(0, 1)$ nejde vyjádřit analyticky, máme jen $\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$, kde $\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -x^2/2$ je hustota standardního normálního rozdělení. Její hodnoty proto vyhledáváme v tabulkách, případně počítáme numericky.

Příklad 2.26. Předpokládejme, že $X \sim N(3, 5)$. Spočteme $P[X \geq 1]$. Dále spočtete $q = F_X^{-1}(0.2)$.

Důkaz. Počítáme přímo

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - P[Z \leq \frac{1-3}{\sqrt{5}}] \approx 1 - \Phi(-0.8944) = 0.81.$$

Dále z tabulek víme, že $\Phi(-0.8416) = 0.2$, potom

$$0.2 = P[X \leq q] = P[Z \leq \frac{q - \mu}{\sigma}] = \Phi[\frac{q - \mu}{\sigma}],$$

proto $-0.8416 = \frac{q - \mu}{\sigma} = \frac{q - 3}{\sqrt{5}}$ a tedy $q = 3 - 0.8416\sqrt{5} \approx 1.1181$. \square

Definice 2.27 (Exponenciální rozdělení). Náhodná veličina X má *exponenciální rozdělení* s parametrem $\lambda > 0$ (zapisujeme $X \sim \text{Exp}(\lambda)$) právě tehdy, když

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \chi_{\{x > 0\}}.$$

Definice 2.28 (Gamma rozdělení). Náhodná veličina X má *Gamma rozdělení* s parametry $a, p > 0$ právě tehdy, když

$$f_X(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} \chi_{\{x > 0\}},$$

kde $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt$ je gamma funkce (spojité rozšíření faktoriálu). Zapisujeme $X \sim \text{Gamma}(a, p)$ nebo $X \sim \Gamma(a, p)$. Exponenciální rozdělení $\text{Exp}(a)$ je speciálním případem Gamma rozdělení s parametrem $p = 1$.

Opět máme součtový vzorec pro nezávislé veličiny $X \sim \Gamma(a, p_X), Y \sim \Gamma(a, p_Y)$, platí totiž $X + Y \sim \Gamma(a, p_X + p_Y)$.

Definice 2.29 (Beta rozdělení). Náhodná veličina X má *Beta rozdělení* s parametry $\alpha, \beta > 0$ právě tehdy, když

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \chi_{\{x \in (0,1)\}}.$$

Zapisujeme $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ nebo $X \sim B(\alpha, \beta)$. Všimněme si, že na rozdíl od předchozích rozdělení jde o rozdělení na kompaktu.

konec 5. přednášky (3.3.2025)

Definice 2.30 (χ^2 -rozdělení). Náhodná veličina X má χ^2 -rozdělení s p stupni volnosti (zapisujeme $X \sim \chi_p^2$) právě tehdy, když

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(p/2)2^{p/2}} x^{p/2-1} e^{-x/2} \chi_{\{x > 0\}}.$$

Máme-li soubor nezávislých náhodných veličin $X_1, \dots, X_p \sim N(0, 1)$, potom součet jejich druhých mocnin odpovídá χ^2 -rozdělení, $\sum_{i=1}^p X_i^2 \sim \chi_p^2$.

Definice 2.31 (Studentovo t -rozdělení). Náhodná veličina X má Studentovo t -rozdělení s ν stupni volnosti (zapisujeme $X \sim t_\nu$) právě tehdy, když

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}} \frac{1}{(1+x^2/\nu)^{(\nu+1)/2}}.$$

Definice 2.32 (Cauchyho rozdělení). Cauchyovo rozdělení je speciální případ t -rozdělení, když $\nu = 1$. Potom platí

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

K zajímavým vlastnostem Cauchyova rozdělení patří například to, že nemá střední hodnotu (bude upřesněno později).

Přejdeme dále k vícerozměrným náhodným veličinám, jedním z jejich využití je například možnost formální definice pojmu nezávislosti několika náhodných veličin.

Definice 2.33. Necht (Ω, \mathcal{A}) je měřitelný prostor. *Náhodný vektor* je měřitelné zobrazení, které každému výsledku ω přiřadí reálný d -rozměrný vektor $\vec{X}(\omega)$. To znamená, že

$$\vec{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \wedge \{\omega \in \Omega : \vec{X}(\omega) \leq \vec{x}\} \in \mathcal{A} \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Definice 2.34. *Rozdělením náhodného vektoru* $\vec{X} : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ nazveme indukovanou pravděpodobnostní míru $P_{\vec{X}}$ na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ definovanou jako

$$P_{\vec{X}}(B) := P[\{\omega \in \Omega : \vec{X}(\omega) \in B\}]$$

pro všechny $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Již na první pohled je zřejmá analogie s jednorozměrnými náhodnými veličinami v tom, že $P_{\vec{X}}$ je obraz míry P v zobrazení \vec{X} , kde se původní pravděpodobnostní prostor zobrazí na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P_{\vec{X}})$. Platí, že pokud máme náhodný vektor $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$, potom X_i je náhodná veličina pro všechna $i \in \{1, \dots, d\}$ (důsledek definice, avšak platí i opačná implikace).

Definice 2.35. Necht (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor. *Sdružená distribuční funkce* náhodného vektoru \vec{X} je funkce $F_{\vec{X}} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ definovaná jako

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}) = P(\vec{X} \leq \vec{x}) = P\left(\bigcup_{l=1}^d \{X_l \leq x_l\}\right)$$

pro všechna $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T \in \mathbb{R}^d$.

Analogicky s náhodnými veličinami si zformulujeme tvrzení o základních vlastnostech sdružených distribučních funkcí.

Věta 2.36 (Vlastnosti sdružené distribuční funkce). *Pokud je F sdružená distribuční funkce d -rozměrného náhodného vektoru \vec{X} , pak platí*

- (i) F je po složkách neklesající a zprava spojitá;
- (ii) $\lim_{x_l \rightarrow -\infty} F(\vec{x}) = 0$ pro každé $l = 1 \dots d$;

(iii) $\lim_{x_l \rightarrow +\infty \forall l} F(\vec{x}) = 1$.

Důkaz. Nejdříve dokážeme vlastnost (i). Fixujme $x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ a definujeme funkci $G(x) := F_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_{l-1}, x, x_{l+1}, \dots, x_d)$. Z monotonie pravděpodobnosti je G neklesající a nezáporná. Jelikož je G neklesající, nutně existuje limita $\lim_{y \rightarrow x^+} G(y) \geq G(x)$. Dokážeme, že dochází k rovnosti (čímž dokážeme spojitost zprava).

Z Heineovy věty plyne, že $\lim_{y \rightarrow x^+} G(y) = \lim G(x + \frac{1}{n})$. Označme $B_n := (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_{l-1}] \times (-\infty, x + \frac{1}{n}) \times (-\infty, x_{l+1}] \times \dots \times (-\infty, x_n]$. Potom máme, že $B_n \searrow B := (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_{l-1}] \times (-\infty, x] \times (-\infty, x_{l+1}] \times \dots \times (-\infty, x_n]$.

Dále s využitím věty o spojitosti míry (Věta 1.7) můžeme psát

$$\lim_{y \rightarrow x^+} G(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(x + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\vec{X}}(B_n) = P_{\vec{X}}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P_{\vec{X}}(B) = G(x),$$

čímž je ukončen důkaz vlastnosti (i).

K důkazu vlastnosti (ii) opět mějme pevná $x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_d \in \mathbb{R}$. Opět uvažujme funkci G z předchozí části důkazu, která je neklesající a nezáporná. Proto musí existovat její limita $\lim_{\vec{x} \rightarrow -\infty} G(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(-n)$ (opět plyne z Heineovy věty). Definujme $C_n := (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_{l-1}] \times (-\infty, -n] \times (-\infty, x_{l+1}] \times \dots \times (-\infty, x_n]$, potom platí že $C_n \searrow \emptyset$. Podobným argumentem jako posledně máme

$$\lim_{x_l \rightarrow -\infty} F(\vec{x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\vec{X}}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = P_{\vec{X}}(\emptyset) = 0,$$

čímž jsme dokázali vlastnost (ii).

Nakonec si uvědomíme, že podmínka z vlastnosti (iii) je ekvivalentní tomu, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{x_l\} = \infty$. Z již několikrát použité věty o spojitosti pravděpodobnosti máme, že $1 \geq F_{\vec{X}}(\vec{x}) \geq F_{\vec{X}}(\min\{x_l\}[1, \dots, 1]^T)$. Stačí tedy dokázat, že poslední uvedená limita je rovna ∞ .

Položme $H(x) := F_{\vec{X}}(x[1, \dots, 1]^T)$. Z monotonie pravděpodobnosti máme, že funkce H je neklesající. Dále $0 \leq H(x) \leq 1$, tedy existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(n)$ (jako limita posloupnosti). Položme $D_n := (-\infty, n]^d$. Opět z věty o spojitosti míry můžeme psát

$$\lim_{x_l \rightarrow +\infty \forall l} F(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\vec{X}}(D_n) = P_{\vec{X}}(\mathbb{R}^d) = 1,$$

čímž jsme získali požadovanou rovnost. \square

Věta 2.37 (Marginální distribuční funkce). *Pokud je $F_{\vec{X}}$ sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$, pak*

$$\lim_{x_d \rightarrow +\infty} F_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_d) = F(x_1, \dots, x_{d-1}), \forall \vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T \in \mathbb{R}^d,$$

kde F je distribuční funkce náhodného podvektoru $[X_1, \dots, X_{d-1}]^T$.

Důkaz. Necht je dána libovolná posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ taková, že $\lim z_n = \infty$. Dále označme $B := \bigcap_{l=1}^{d-1} \{X_l \leq x_l\}$, $B_n := B \cup \{X_d \leq z_n\}$ a $D_n := \left(\bigcup_{m=n}^\infty B_m^C\right)^C$. Platí $D_n \subseteq B_n \subseteq B = \bigcup_{m=1}^\infty B_m$ a $D_n \nearrow B$. Ze spojitosti míry (Věta 1.7) máme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n) = P(B)$ a z monotonie míry máme, že $P(D_n) \leq P(B_n) \leq P(B)$. Potom (viz věta o dvou strážnících) máme $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(B)$. Nakonec z Heineovy věty máme, že $\lim_{x_d \rightarrow \infty} P(B \cap \{X_d \leq x_d\}) = P(B)$. \square

Výše zmíněný limitní přechod můžeme opakovat vícekrát a “marginalizovat” až na jednorozměrný případ. Navíc, složky můžeme permutovat, tedy v kombinaci s touto větou můžeme “vyřadit” libovolnou složku.

Definice 2.38 (Marginální rozdělení). Necht $J \subseteq \{1, \dots, d\}$ a $|J| = m$. Potom *náhodný podvektor* definujeme jako $\vec{Y} \equiv \{X_l\}_{l \in J} : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ a *marginálním rozdělením* rozumíme indukovanou pravděpodobnostní míru $P_{\vec{Y}}$ na prostoru $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$.

Ve speciálním případě $J = \{1, \dots, m\}$ pak máme $P_{\vec{Y}}(B) = P_{\vec{X}}(B \times \mathbb{R}^{d-m})$. Pro $|J| = 1$ celkem snadno vidíme, že se jedná o náhodnou veličinu.

V následujících definicích definujeme spojitě a diskrétní náhodné vektory podobně tomu, jak jsme to udělali u náhodných veličin.

Definice 2.39. Náhodný vektor $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ nazveme *diskrétní*, jestliže existují nejvýše spočetná množina $I \subseteq \mathbb{N}$ a posloupnosti $\{\vec{x}_i\}_{i \in I}$ prvků \mathbb{R}^d a $\{p_i\}_{i \in I}$ prvků intervalu $(0, 1]$ takové, že platí

$$P_{\vec{X}} = \sum_{i \in I} p_i \delta_{\vec{x}_i} \text{ a } \sum_{i \in I} p_i = 1,$$

kde $\delta_{\vec{u}}$ značí Diracovu míru v $\vec{u} \in \mathbb{R}^d$.

Definice 2.40. Náhodný vektor $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ nazveme (*absolutně*) *spojitý*, jestliže $P_{\vec{X}}$ je absolutně spojitá vůči d -rozměrné Lebesgueově míře λ^d .

V případě diskrétního náhodného vektoru pak můžeme explicitně uvést sdruženou distribuční funkci $F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \sum_{i \in I} p_i \chi_{[\vec{x}_i, \infty)}(\vec{x}) = \sum_{i \in I}^{\vec{x}_i \leq \vec{x}} p_i$, kde relaci \leq uvažujeme po složkách (musí platit pro všechny složky zároveň).

Pro spojitě náhodné vektory si uvědomíme, že sdružená distribuční funkce má derivaci $\frac{\partial^d}{\partial x_1 \dots \partial x_d} F_{\vec{X}}$ s.v. vzhledem k λ^d a platí následující vztah pro sdruženou hustotu

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{\partial^d}{\partial x_1 \dots \partial x_d} F_{\vec{X}}.$$

Tento vztah platí λ^d -skoro všude a navíc v námi zkoumaných příkladech je $F_{\vec{X}}$ dostatečně hladká, tedy nezáleží na pořadí derivací. Potom také můžeme z hustoty spočítat distribuční funkci pomocí vztahu

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_d) dt_d \dots dt_1,$$

pro všechna $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T \in \mathbb{R}^d$. Díky Fubiniově větě opět nezáleží na pořadí integrálů.

konec 6. přednášky (4.3.2025)

Věta 2.41 (Hustota vzhledem k součinové referenční míře). *Nechť $P_{\vec{X}}$ je rozdělení náhodného vektoru $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ a nechť existují σ -konečné míry $\mu_l, l \in \{1, \dots, d\}$ na \mathbb{R} takové, že pro jejich součin platí $P_{\vec{X}} \ll \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_d$. Potom $P_{X_l} \ll \mu_l$ pro všechny složky $l \in \{1, \dots, d\}$. Dále pak existují nezáporné měřitelné funkce (hustoty) $f_{\vec{X}} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ a $f_{X_l} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ pro $l \in \{1, \dots, d\}$ takové, že*

$$P_{\vec{X}}(\times_{l=1}^d (-\infty, x_l]) = F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \int_{\times_{l=1}^d (-\infty, x_l]} f_{\vec{X}}(\vec{t}) d(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_d)$$

pro všechna $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T$. Pro borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ navíc platí

$$P_{\vec{X}}(B) = \int_B f_{\vec{X}}(\vec{t}) d(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_d).$$

Potom také $F_{X_l}(x_l) = \int_{-\infty}^{x_l} f_{X_l}(t) d\mu_l$ pro všechna $x_l \in \mathbb{R}$ a všechny složky $l \in \{1, \dots, d\}$, kde

$$f_{X_l}(t) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_d) d(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_{l-1} \otimes \mu_{l+1} \otimes \dots \otimes \mu_d)$$

platí μ_l -skoro všude.

Důkaz. Existence hustot plyne přímo z Radonovy-Nikodymovy věty. Zbytek plyne z Fubiniho věty (předpoklady splněny díky Radonově-Nikodymově větě a faktu, že pravděpodobnostní prostor je vždy normalizovaný). \square

Poznamenejme, že předpoklad existence příslušných měr je automaticky splněn v případě diskrétních nebo absolutně spojitých náhodných vektorů.

Příklad 2.42. Mějme absolutně spojitý náhodný vektor $[X, Y]^T$. Potom existuje jeho sdružená distribuční funkce $F_{[X, Y]^T}(x, y)$. Chceme-li dostat jednorozměrnou distribuční funkci $F_X(x)$, s použitím Věty 2.37 dostáváme $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{[X, Y]^T}(x, y)$. Potom jeho hustotu dostaneme, zderivováním $f_X(x) = F'_X(x)$. Navíc z předchozí věty (Věta 2.41) máme, že existuje sdružená hustota $f_{[X, Y]^T}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{[X, Y]^T}(x, y)$. Pro získání jednorozměrné hustoty f_X pak už jen stačí integrovat podle y přes celou reálnou osu.

Nechť \vec{X} je diskrétní náhodný vektor a ν čítací míra na $\{\vec{x}_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^d$, pak hustotu tohoto vektoru vzhledem k čítací míře ν nazýváme *pravděpodobnostní funkcí* diskrétního mnohorozměrného rozdělení \vec{X} .

Příklad 2.43. Uvažujme dvojrozměrný náhodný vektor $[X, Y]^T$. Pro přehlednost uvedeme i řádkové/sloupkové součty (jde o marginální hustoty).

	$Y = 0$	$Y = 1$	
$X = 0$	1/9	2/9	1/3
$X = 1$	2/9	4/9	2/3
	1/3	2/3	1

Potom přímým výpočtem můžeme získat například $f_{[X,Y]^T}(1,1) = P(X = 1, Y = 1) = 4/9$.

Příklad 2.44. Necht dvourozměrný náhodný vektor $[X, Y]^T$ je rovnoměrně rozdělen na jednotkovém čtverci. Pak z Věty 2.41 okamžitě vychází $f_{[X,Y]^T}(x, y) = \chi_{\{(x,y) \in [0,1]^2\}}$. Určíme $P[X < 1/2, Y < 1/2]$. Tato událost $B := \{X < 1/2, Y < 1/2\}$ odpovídá podmnožině jednotkového čtverce, tedy zintegrováním přes tuto podmnožinu nepočítáme nic jiného než plošný obsah této množiny. Z Fubiniovy věty tedy dostáváme $P(B) = 1/4$.

Uvedeme užitečný důsledek předchozí věty pouze v případě dvourozměrných vektorů, snadno se však dají rozšířit i pro případ vícerozměrných vektorů.

Důsledek 2.45 (Marginální rozdělení pro dvourozměrné náhodné vektory). *Pokud diskrétní náhodný vektor $[X, Y]^T$ má sdruženou pravděpodobnostní funkci $f_{[X,Y]^T}$, pak marginální pravděpodobnostní funkce pro X je*

$$f_X(x) = P[X = x] = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y f_{[X,Y]^T}(x, y).$$

Pokud spojitý náhodný vektor $[X, Y]^T$ má sdruženou pravděpodobnostní funkci $f_{[X,Y]^T}$, pak marginální hustota pro X je

$$f_X(x) = \int f_{[X,Y]^T}(x, y) dy.$$

Věnujme opět pozornost pojmu nezávislosti náhodných veličin. Všimněme si, že platí následující vlastnost

$$\lim_{x_j \rightarrow \infty \forall j \in \{1, \dots, d\} \setminus l} F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \lim_{x_j \rightarrow \infty \forall j \in \{1, \dots, d\} \setminus l} P[X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d] = P[X_l \leq x_l] =: F_{X_l}(x_l).$$

Definice 2.46. Náhodné veličiny X_1, \dots, X_d jsou *nezávislé*, pokud $F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \prod_{l=1}^d F_{X_l}(x_l)$ pro každý vektor $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T \in \mathbb{R}^d$.

Analogicky s předchozí definicí definujeme nezávislost náhodných vektorů. V literatuře se vyskytuje i jiná, ekvivaletní, definice nezávislosti, kterou uvedeme později.

Definice 2.47. Náhodné vektory $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_d$ jsou *nezávislé*, pokud

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \prod_{l=1}^d F_{\vec{X}_l}(\vec{x}_l)$$

pro každý “nad-vektor” $\vec{x} = [\vec{x}_1^T, \dots, \vec{x}_d^T]^T \in \mathbb{R}^{\sum_{l=1}^d d_l}$ kde $\vec{X} = [\vec{X}_1^T, \dots, \vec{X}_d^T]^T$ a \vec{X}_l jsou d_l -rozměrné náhodné vektory pro všechna $l \in \{1, \dots, d\}$.

Dalším důležitým pojmem je takzvaný nosič náhodné veličiny. Rozumíme tím v zásadě množinu, kde náhodná veličina “žije”. Uvedeme zde definici pro diskrétní a spojitě náhodné veličiny. Tyto pojmy se budou hodit pro vymezení prostoru, přes který poté budeme integrovat.

Definice 2.48. *Nosičem diskrétní náhodné veličiny X nazýváme následující množinu $S(X) = \{x \in \mathbb{R} : P[X = x] > 0\}$. Nosičem spojitě náhodné veličiny Y rozumíme množinu $S(Y) = \{y \in \mathbb{R} : f_Y(y) > 0\}$. Obdobně definujeme i nosič náhodného vektoru (cvičení).*

Věta 2.49 (Ekvivalentní charakterizace nezávislosti). *Nechť sdružená pravděpodobnostní funkce diskrétního náhodného vektoru $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ je $f_{\vec{X}}(\vec{x}) = P[\vec{X} = \vec{x}]$. Pak platí, že náhodné veličiny $\{X_1, \dots, X_d\}$ jsou nezávislé právě tehdy, když*

$$P[\vec{X} = \vec{x}] = \prod_{l=1}^d P[X_l = x_l]$$

pro všechny vektory $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T \in \times_{l=1}^d S(X_l)$.

Nechť sdružená pravděpodobnostní funkce spojitěho náhodného vektoru $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ je $f_{\vec{X}}(\vec{x})$. Pak platí, že $\{X_1, \dots, X_d\}$ jsou nezávislé právě tehdy, když

$$P[\vec{X} = \vec{x}] = \prod_{l=1}^d f_{X_l}(x_l)$$

pro λ^d -skoro všechny vektory $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T \in \times_{l=1}^d S(X_l)$.

Důkaz. Dokážeme oba případy (spojitý a diskrétní) najednou tak, že budeme uvažovat příslušnou referenční součinnovou míru.

Nejdříve dokážeme implikaci \Rightarrow . Uvažujme vektor $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]^T$. Potom z definice nezávislosti a linearity integrálu dostáváme

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \prod_{l=1}^d F_{X_l}(x_l) = \prod_{l=1}^d \int_{-\infty}^{x_l} f_{x_l}(t_l) d\mu_l = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} \prod_{l=1}^d f_{x_l}(t_l) d\mu_d \cdots d\mu_1,$$

kde druhá rovnost plyne z věty o hustotě vzhledem k součinnové referenční míře (Věta 2.41) s mírou λ^d , případně sčítací mírou ν na \mathbb{R}^d . Dále díky Fubiniově větě můžeme pokračovat v úpravách

$$\int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} \prod_{l=1}^d f_{x_l}(t_l) d\mu_d \cdots d\mu_1 = \int_{(-\infty, \vec{x}]} \prod_{l=1}^d f_{x_l}(t_l) d(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_d).$$

Pak už ale nutně musí platit $f_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_d) = \prod_{l=1}^d f_{x_l}(t_l)$.

Implikace \Leftarrow se dokáže obráceným postupem (cvičení). □

Důsledek 2.50. Předpokládejme, že $S([X, Y]^T) = S(X) \times S(Y)$. Pokud pro sdruženou pravděpodobnostní funkci diskrétního náhodného vektoru $[X, Y]^T$ platí $P[X = x, Y = y] = g(x)h(y)$ pro nějaké měřitelné funkce g, h a pro všechna $[x, y]^T \in S([X, Y]^T)$, pak X a Y jsou nezávislé.

Obdobně, pokud pro sdruženou pravděpodobnostní funkci spojitého náhodného vektoru $[X, Y]^T$ platí $f_{[X, Y]^T}(x, y) = g(x)h(y)$ pro nějaké měřitelné funkce g, h a pro λ^2 -skoro všechna $[x, y]^T \in S([X, Y]^T)$, pak X a Y jsou nezávislé.

Poznámka: g a h nutně nemusí být hustoty nebo pravděpodobnostní funkce, ale normovaná funkce $\tilde{g} := \frac{g}{\int g}$ již ano.

Důkaz. Definujme \tilde{g} a \tilde{h} jako v poznámce. Potom musí existovat verze $\tilde{g}, \tilde{h} \geq 0$ měřitelná. Zbytek dostaneme z předchozí věty. \square

konec 7. přednášky (10.3.2025)

Věta 2.51 (Alternativní (ekvivalentní) definice nezávislosti). Náhodné veličiny X_1, \dots, X_d jsou nezávislé právě tehdy, když

$$P_{\vec{X}} = \otimes_{l=1}^d P_{X_l}.$$

Důkaz. Začneme implikací zprava doleva (\Leftarrow). Jestliže pro všechny množiny $B_l \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), l = 1, \dots, d$ platí

$$P_{\vec{X}}(\times_{l=1}^d B_l) = \prod_{l=1}^d P_{X_l}(B_l),$$

pak vezmeme $B_l = (-\infty, x_l]$ pro fixní $\vec{x} = [x_1, \dots, x_d]$ generátory borelovské σ -algebry a můžeme počítat

$$F_{\vec{X}}(\vec{x}) = P_{\vec{X}}(\times_{l=1}^d (-\infty, x_l]) = \prod_{l=1}^d P_{X_l}((-\infty, x_l]) = \prod_{l=1}^d F_{X_l}(x_l),$$

což je přímo definice nezávislosti.

K důkazu opačné implikace (předpokládáme platnost $F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \prod_{l=1}^d F_{X_l}(x_l)$ pro všechna $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$) použijeme Dynkinův systém

$$D = \{ \times_{l=1}^d (-\infty, x_l], x_l \in \mathbb{R}, \forall l \in \{1, \dots, d\} \}.$$

Tento systém je uzavřený na průniky a generuje celou borelovskou σ -algebru $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Jelikož $P_{\vec{X}}(\mathbb{R}^d) = 1$, dostáváme z věty o jednoznačnosti míry rovnost obou měr ($P_{\vec{X}}$ a $\otimes_{l=1}^d P_{X_l}$) na celé $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. \square

Vrátíme se opět k podmíněnosti, tentokrát budeme zkoumat podmíněnost náhodných veličin. Motivačním příkladem budiž zjištění průměrné mzdy občana, který vystudoval MatFyz na základě znalosti průměrné mzdy všech občanů ČR. Opět se jedná o zjednodušenou definici, ta obecnější bude uvedena v pokročilejších kurzech.

Definice 2.52. Pro diskrétní náhodný vektor $[X, Y]^T$ definujeme *podmíněnou pravděpodobnostní funkci* X za podmínky $Y = y$ vztahem

$$f_{X|Y}(x|y) \equiv P[X = x|Y = y] := \frac{P[X = x, Y = y]}{P[Y = y]} \equiv \frac{f_{[X,Y]^T}(x, y)}{f_Y(y)},$$

pokud $P[Y = y] > 0$.

Pro spojitý náhodný vektor $[X, Y]^T$ je *podmíněná hustota* X za podmínky $Y = y$

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)},$$

pokud $f_Y(y) > 0$.

Je třeba si uvědomit, že podmíněná pravděpodobnostní funkce (hustota) jsou funkce argumentu x s parametrem y . V případech nepokrytých touto definicí můžeme definovat podmíněnou pravděpodobnost libovolně. Několik užitečných vzorců pro výpočet podmíněné pravděpodobnosti, pro diskrétní vektor platí $P[X \in A|Y = y] = \sum_{x \in A} P[X = x|Y = y]$ a pro spojitý vektor platí $P[X \in A|Y = y] = \int_A f_{X|Y}(x|y)dy$.

V dalších kapitolách budeme pracovat s mnohorozměrným normálním rozdělením, je proto vhodné si ho zadefinovat už teď. V obecném případě nestačí zadefinovat chování po složkách, je třeba nějakým způsobem zahrnout i vztahy mezi jednotlivými složkami.

Definice 2.53. Náhodný vektor $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ má *d-rozměrné normální rozdělení* s parametry $\mu \in \mathbb{R}^d$ a $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ (značíme $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$), pokud existuje k -rozměrný náhodný vektor $\vec{Y} = [Y_1, \dots, Y_k]^T$ a matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{d \times k}$ takové, že

- (i) $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ jsou nezávislé;
- (ii) $Y_j \sim N(0, 1)$ pro všechny složky $j \in \{1, \dots, k\}$;
- (iii) $\mathbb{A}\mathbb{A}^T = \Sigma$;
- (iv) $\vec{X} = \mathbb{A}\vec{Y} + \mu$.

Takto komplikovaná definice je potřeba, neboť matice Σ nutně nemusí mít jednoznačně určenou “druhou odmocninu”, proto musíme použít nějakou druhou odmocninu, která bude případně dávat nižší hodnotu. Takto definovaná matice \mathbb{A} a vektor μ jsou deterministické (nenáhodné). Pozornost si zaslouží tzv. standardní d -rozměrné normální rozdělení $N_d(\vec{0}, I_d)$.

Na závěr se budeme chvíli věnovat transformacím náhodných veličin. V obecném případě je možné formalizovat tuto představu pomocí věty o substituci z TMI, avšak pro naše účely postačí uvést jen několik speciálních případů.

Mějme diskrétní náhodnou veličinu X a ne nutně monotónní funkci $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro kterou platí $Y := t(X)$. Chceme odvodit pravděpodobnostní funkci

$P[Y = y]$. Můžeme psát

$$P[Y = y] = P[t(X) = y] = P[X \in t^{-1}(y)] = \sum_{t(x)=y} P[X = x].$$

Dále mějme spojitou náhodnou veličinu X , známe její hustotu $f_X(x)$. Cílem je spočítat hustotu $f_Y(y)$, kde $Y = t(X)$. Pro každé y můžeme nalézt množinu $\mathcal{T}_y = \{x : t(x) \leq y\}$. Poté můžeme spočítat distribuční funkci rozdělení Y .

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[t(X) \leq Y] = P[\omega : t(X(\omega)) \leq Y] = \int_{\mathcal{T}(y)} f_X(x) dx,$$

hustotu poté můžeme získat pouhým zderivováním distribuční funkce F_Y .

Dále uvažujme případ (dvourozměrného) diskrétního náhodného vektoru $[X, Y]^T$ a transformace $Z = t(X, Y)$. Ze znalosti diskrétního rozdělení vektoru $[X, Y]$ chceme spočítat $P[Z = z]$. Můžeme psát

$$\begin{aligned} P[Z = z] &= P[t(X, Y) = z] = P[\omega : t([X, Y]^T(\omega)) = z] = \\ &= P[[X, Y]^T \in t^{-1}(z)] = \sum_{t(x,y)=z} P[X = x, Y = y]. \end{aligned}$$

Nakonec mějme spojitý náhodný vektor $[X, Y]^T$, pro nějž známe hustotu $f_{[X,Y]^T}(x, y)$ a chceme získat hustotu $f_Z(z)$, jestliže náhodná veličina Z je definována $Z := t(X, Y)$. V analogii se spojitou náhodnou veličinou nalezneme pro každé $z \in \mathbb{R}$ množinu $\mathcal{T}(z) = \{[x, y] : t(x, y) \leq z\}$. Opět spočteme distribuční funkci F_Z pomocí následujících kroků

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P[Z \leq z] = P[t(X, Y) \leq z] = P[\omega : t([X, Y]^T(\omega)) \leq z] = \\ &= \iint_{\mathcal{T}(z)} f_{[X,Y]^T}(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

hustotu f_Z opět můžeme získat pomocí zderivování funkce F_Z .

3 Střední hodnota

V této kapitole se budeme věnovat pojmu střední hodnoty, laicky řečeno, kolem jaké hodnoty se nachází naše rozdělení. Nejedná se ani o průměr ani o prostřední, případně nejčastější hodnotu, tyto pojmy zadefinujeme později a ve statistice mají svůj vlastní význam odlišný od střední hodnoty.

Definice 3.1. *Střední hodnota* náhodné veličiny X je reálné číslo

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}X = \int X dP \equiv \int X(\omega) dP(\omega),$$

pokud pravá strana existuje.

Tato definice je velmi teoretická, k praktickému výpočtu se hodí následující věta, kde převedeme integrál na výpočet pomocí obrazu pravděpodobnostní míry.

Věta 3.2. *Střední hodnota náhodné veličiny X je $\mathbb{E}X = \int x dP_X(x)$, pokud pravá strana existuje.*

Důkaz. Z věty o přenosu integrace (2.5) při volbě $g = Id$ a $(\mathbb{M}, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ dostáváme požadované tvrzení. \square

Z Radon-Nikodymovy věty ihned plyne následující pozorování

Pozorování 3.3. *Střední hodnota veličiny X je*

$$\mathbb{E}X = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, & X \text{ spojitá}; \\ \sum_{x \in S(X)} x P[X = x], & X \text{ diskrétní}. \end{cases}$$

Střední hodnota nemusí existovat vždy, jeden z takových případů uvedeme v následujícím příkladu.

Příklad 3.4. Pokud $X \sim Cauchy$ (Definice 2.32), pak $\mathbb{E}X$ neexistuje. Pomocí integrování per partes můžeme počítat

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = [x \arctan(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \arctan(x) dx = \infty.$$

Dostali jsme, že pro integrál přes celou reálnou přímku není definován výraz $\infty - \infty$.

Uvažujme teď transformaci $Y = t(X)$. Následující věta nám umožní počítat střední hodnotu transformované náhodné veličiny.

Věta 3.5 (Pravidlo líného statistika). *Buď $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelná funkce a necht $Y = t(X)$, kde X je nějaká náhodná veličina. Pak*

$$\mathbb{E}Y = \int t(x) dP_X(x),$$

pokud pravá strana existuje.

Důkaz. Z Věty 2.5 dostáváme

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}[t(X)] = \int_{\mathbb{R}} t(X(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} t(x)dP_X(x).$$

□

Poznamenejme si explicitní vzorce pro transformaci spojitých a diskrétní náhodných veličin, které jsou přímým důsledkem předchozí věty:

Důsledek 3.6. *Mějme náhodné veličiny X a Y takové, že platí $Y = t(X)$ pro nějakou transformaci $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Má-li X diskrétní rozdělení, potom*

$$\mathbb{E}Y = \sum_{x \in S(X)} t(x)P[X = x].$$

Je-li X spojitá, potom platí

$$\mathbb{E}Y = \int_{\mathbb{R}} t(x)f_X(x)dx.$$

Přímé využití pravidla lineárního statistika si uvedeme v definici a aplikacích následujícího pojmu, který jistým způsobem umožňuje charakterizovat chování rozdělení.

Definice 3.7. Pro reálné číslo k definujeme k -tý *moment* náhodné veličiny X jako $\mathbb{E}[X^k]$ za předpokladu, že $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$. Dále definujeme k -tý *absolutní moment* jako $\mathbb{E}[|X|^k]$, pokud existuje.

V praxi se nejčastěji setkáme s momenty jen pro k přirozené, pokud nebude řečeno jinak, všechny momenty budou mít přirozený parametr.

Věta 3.8. *Pokud existuje k -tý moment, pak existuje l -tý moment pro jakékoli $l \in \{1, \dots, k\}$.*

Důkaz. Potřebujeme ukázat, že $\mathbb{E}[|X|^l] < \infty$. Můžeme počítat

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X|^l] &= \int_{\mathbb{R}} |x|^l dP_X(x) = \int_{|x| \leq 1} |x|^l dP_X(x) + \int_{|x| > 1} |x|^l dP_X(x) \leq \\ &\int_{|x| \leq 1} dP_X(x) + \int_{|x| > 1} |x|^k dP_X(x) \leq \int_{\mathbb{R}} dP_X(x) + \int_{\mathbb{R}} |x|^k dP_X(x). \end{aligned}$$

Dostáváme $1 + \mathbb{E}[|X|^k] < \infty$, čímž je důkaz ukončen. □

Některá zobrazení mají jen několik prvních momentů a žádné vyšší momenty neexistují, jako například Studentovo t -rozdělení (Definice 2.31) s $\nu = 3$ stupni volnosti.

Příklad 3.9. Pro $X \sim t_3$ platí $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}X^2 = 2$ ale $\mathbb{E}|X|^3 = \infty$. (cvičení, použijte per partes)

Definujeme dále \mathcal{L}^p prostory náhodných veličin, které jsou podobné L^p prostorům z teorie míry a funkcionální analýzy.

Definice 3.10. Pro reálné číslo p (v praxi se vystačíme pouze s případem $p \geq 1$) definujeme prostor \mathcal{L}^p tak, že náhodná veličina $X \in \mathcal{L}^p$, jestliže $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$.

Ukážeme si pár základních vlastností prostoru \mathcal{L}^1 , které se mohou hodit při praktických aplikacích.

Věta 3.11 (Základní vlastnosti prostoru \mathcal{L}^1). *Nechť jsou dány $X_1, \dots, X_d \in \mathcal{L}^1$ a a_1, \dots, a_d jsou konstanty, pak platí linearita ve smyslu*

$$\mathbb{E} \left(\sum_{l=1}^d a_l X_l \right) = \sum_{l=1}^d a_l \mathbb{E} X_l.$$

Dále mějme $X_1, \dots, X_d \in \mathcal{L}^1$ nezávislé náhodné veličiny, potom platí

$$\mathbb{E} \left(\prod_{l=1}^d X_l \right) = \prod_{l=1}^d \mathbb{E} X_l.$$

Důkaz. Linearita plyne z věty o přenosu integrace (Věta 2.5) a linearity Lebesgueova integrálu.

Dokážeme druhou vlastnost. Nejprve ukážeme, že hledaná střední hodnota je dobře definovaná. Uvažujme posloupnost funkcí $\{g_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}\}$ definovaných jako $g_n(\vec{x}) = \prod_{l=1}^d |x_l| \chi_{\{|x_l| \leq n\}}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $g_n(\vec{X})$ omezená a existuje její první moment $\mathbb{E}[g_n(\vec{X})] \in \mathbb{R}$. Díky nezávislosti můžeme psát

$$\mathbb{E}[g_n(\vec{X})] = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{l=1}^d |x_l| \chi_{\{|x_l| \leq n\}} d(\otimes_{l=1}^d P_{X_l}),$$

odkud z Fubiniovy věty a následně linearity integrálu plyne

$$= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{l=1}^d |x_l| \chi_{\{|x_l| \leq n\}} dP_{X_1} \cdots dP_{X_d} = \prod_{l=1}^d \mathbb{E}[|X_l| \chi_{\{|X_l| \leq n\}}] \leq \prod_{l=1}^d \mathbb{E}[|X_l|].$$

Platí, že funkce $g_n(\vec{x})$ jsou nezáporné a $g_n(\vec{x}) \uparrow \prod_{l=1}^d |x_l|$ na celém \mathbb{R}^d . Tudíž z Leviho věty plyne, že $\mathbb{E}[g_n(\vec{X})] \uparrow \mathbb{E}[\prod_{l=1}^d |X_l|]$. Potom ale nutně $\mathbb{E} \left| \prod_{l=1}^d X_l \right| \leq \prod_{l=1}^d \mathbb{E}|X_l| < \infty$, tedy příslušný první moment existuje.

Dále můžeme počítat

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{l=1}^d X_l \right] &= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{l=1}^d x_l dP_{\vec{X}} = \int_{\mathbb{R}} \prod_{l=1}^d x_l d(\otimes_{l=1}^d P_{X_l}) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{l=1}^d x_l dP_{X_1} \cdots dP_{X_d} = \prod_{l=1}^d \int_{\mathbb{R}} x_l dP_{X_l} = \prod_{l=1}^d \mathbb{E} X_l, \end{aligned}$$

kde druhá rovnost plyne z nezávislosti náhodných veličin X_1, \dots, X_d , třetí z Fubiniovy věty a předposlední z linearity integrálu. \square

konec 8. přednášky (11.3.2025)

Teď definujeme další neplnohodnotnou (jinými slovy, neurčuje danou náhodnou veličinu, případně její rozdělení jednoznačně) charakteristiku. (Poznámka: příkladem plnohodnotné charakteristiky je distribuční funkce rozdělení)

Definice 3.12. Rozptyl náhodné veličiny X je definován jako

$$\text{Var } X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2,$$

za předpokladu, že pravá strana je dobře definovaná. Pak *směrodatná odchylka* též náhodné veličiny je definovaná je

$$\text{sd}(X) = \sqrt{\text{Var } X}.$$

Uvědomme si, že některé volby charakterizování variability rozdělení nejsou vhodné, například na první pohled logické “ $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)$ ” je nulová všude, kde je definovaná.

Věta 3.13 (Vlastnosti rozptylu). *Za předpokladu, že uvažované druhé momenty jsou konečné, potom*

$$\text{Var } X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \geq 0.$$

Pokud $a, b \in \mathbb{R}$, pak

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var } X,$$

jinými slovy, rozptyl se chová jako kvadratická forma. Pokud X_1, \dots, X_2 jsou nezávislé a a_1, \dots, a_d jsou reálné konstanty, pak

$$\text{Var} \left(\sum_{l=1}^d a_l X_l \right) = \sum_{l=1}^d a_l^2 \text{Var } X_l.$$

Důkaz. Dokážeme první vlastnost. Máme

$$\text{Var } X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2X(\mathbb{E}X) + (\mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}X^2 - 2(\mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}X)^2,$$

kde předposlední rovnost plyne z linearity střední hodnoty a faktu, že $E[c] = c$ pro konstantu c . Nezápornost plyne z toho, že počítáme střední hodnotu nezáporné náhodné veličiny.

Dále pro druhou vlastnost píšme

$$\text{Var}(aX + b) = \mathbb{E}[(aX + b - \mathbb{E}(aX + b))^2] = \mathbb{E}[a^2 (X - \mathbb{E}X)^2],$$

kde druhá rovnost plyne z linearity střední hodnoty a rovnosti $b = \mathbb{E}b$, dále můžeme psát

$$\mathbb{E}[a^2 (X - \mathbb{E}X)^2] = a^2 \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = a^2 \text{Var } X.$$

K důkazu poslední vlastnosti začneme opět rozepsáním definice

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(\sum_{l=1}^d a_l X_l\right) &= \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^d a_l X_l - \mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^d a_l X_l\right)\right]^2 = \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^d a_l (X_l - \mathbb{E}X_l)\right]^2 = \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^d a_l^2 (X_l - \mathbb{E}X_l)^2 + 2 \sum_{1 \leq j < l \leq d} a_j a_l (X_j - \mathbb{E}X_j)(X_l - \mathbb{E}X_l)\right] = \\ &= \sum_{l=1}^d a_l^2 \mathbb{E}(X_l - \mathbb{E}X_l)^2 + 2 \sum_{1 \leq j < l \leq d} a_j a_l \mathbb{E}(X_j - \mathbb{E}X_j)(X_l - \mathbb{E}X_l) = \sum_{l=1}^d a_l^2 \text{Var} X_l,\end{aligned}$$

kde poslední rovnost plyne z toho, že v případě $j \neq l$ máme díky nezávislosti

$$\mathbb{E}(X_j - \mathbb{E}X_j)(X_l - \mathbb{E}X_l) = \mathbb{E}[X_j X_l] - \mathbb{E}[X_l]\mathbb{E}[X_j] = 0.$$

□

Dalším pojmem, kterému se budeme věnovat, je kovariance a korelace, které charakterizují lineární vztah mezi dvěma náhodnými veličinami.

Definice 3.14. Kovariance mezi X a Y je definována jako

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)).$$

Pokud $\text{Var}(X) \text{Var}(Y) > 0$, pak definujeme *korelaci* mezi X a Y vztahem

$$\rho_{X,Y} \equiv \text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}}.$$

Je třeba si dávat pozor, že tyto pojmy necharakterizují libovolnou souvislost mezi náhodnými veličinami, ale pouze lineární. Navíc, korelace nemusí způsobovat kauzalitu (spotřeba čokolády v dané zemi sice koreluje s počtem Nobelových laureátů, ale nemůžeme zvýšit počet laureátů tím, že zvýšíme spotřebu čokolády).

Dále si všimneme, že z pravidla líného statistika (Věta 3.5) okamžitě plynou následující vztahy.

Důsledek 3.15. Pro X, Y spojitě platí $\mathbb{E}XY = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{(X,Y)}(x, y) dx dy$.
Pro X, Y diskrétní platí $\mathbb{E}XY = \sum_{x \in S(X), y \in S(Y)} xy P[X = x, Y = y]$.

Dále si zformulujeme několik vlastností kovariance a korelace.

Věta 3.16. Pro náhodné veličiny X a Y platí následující tvrzení (jsou-li příslušné matematické objekty dobře definovány).

- (i) $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$;
- (ii) $-1 \leq \text{Corr}(X, Y) \leq 1$;

(iii) $|\text{Corr}(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$ s pravděpodobností 1 pro nějaké hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$.

(iv) Pro nezávislé X a Y platí $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Pozor: opačná implikace nemusí platit (stačí vzít $X \sim U(-1, 1), Y = X^2$).

Důkaz. Budeme postupovat postupně, k důkazu první vlastnosti použijeme následující výpočet:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y,$$

kde druhá rovnost se získá roznásobením závorek analogicky s důkazem předchozí věty. Z tohoto okamžitě plyne vlastnost (iv), neboť nezávislost X a Y implikuje, že $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.

K důkazu vlastnosti (ii) použijeme Cauchyovu-Schwarzovu nerovnost (Věta 4.4), kterou si zde dokážeme. Definujeme funkci $g(a) := \mathbb{E}(aX - Y)^2$, potom

$$0 \leq \mathbb{E}(aX - Y)^2 = \mathbb{E}(a^2X^2 - 2aXY + Y^2) = a^2\mathbb{E}X^2 - 2a\mathbb{E}XY + \mathbb{E}Y^2.$$

Funkci $g(a)$ můžeme zderivovat, dostáváme

$$g'(a) = 2a\mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}XY,$$

svého minima tedy funkce g nabývá v bodě $\frac{\mathbb{E}XY}{\mathbb{E}X^2}$ (bez újmy na obecnosti $\mathbb{E}X^2 \neq 0$, v opačném případě máme $X = 0$ skoro jistě, z čehož vlastnosti z věty plynou triviálně). Dosadíme tuto hodnotu do předpisu funkce $g(a)$ a dostáváme.

$$g\left(\frac{\mathbb{E}XY}{\mathbb{E}X^2}\right) = \frac{(\mathbb{E}XY)^2}{\mathbb{E}X^2} - 2\frac{(\mathbb{E}XY)^2}{\mathbb{E}X^2} + \mathbb{E}Y^2 \geq 0.$$

Z toho již plyne, že $(\mathbb{E}XY)^2 \leq (\mathbb{E}X^2)(\mathbb{E}Y^2)$ (dokázali jsme Cauchy-Schwarz!), z čehož plyne požadované tvrzení.

Vlastnost (iii) budeme dokazovat po implikacích. Nejdříve předpokládejme, že $Y = aX + b$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$. Potom máme

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov}(X, aX + b) = \mathbb{E}[X(aX + b)] - \mathbb{E}X\mathbb{E}(aX + b) = \\ &= a\mathbb{E}X^2 + b\mathbb{E}X - a(\mathbb{E}X)^2 - b\mathbb{E}X = a \text{Var } X. \end{aligned}$$

a můžeme psát

$$|\text{Corr}(X, Y)| = \frac{|\text{Cov}(X, Y)|}{\sqrt{\text{Var } X \text{Var } Y}} = \frac{|a \text{Var } X|}{\sqrt{\text{Var } X a^2 \text{Var } X}} = 1.$$

Nakonec, k důkazu poslední implikace si uvědomíme, že rovnost nastává v případě $|\text{Cor}(X, Y)| = \sqrt{\text{Var } X \text{Var } Y}$. To nastane právě tehdy, když

$$[\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]^2 = [\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2][\mathbb{E}(Y - \mathbb{E}Y)^2].$$

Položme $\tilde{X} = X - \mathbb{E}X$ a $\tilde{Y} = Y - \mathbb{E}Y$. Předchozí výraz pak bude mít tvar

$$[\mathbb{E}\tilde{X}\tilde{Y}]^2 = \mathbb{E}\tilde{X}^2\mathbb{E}\tilde{Y}^2.$$

Dosadíme $a = \frac{\mathbb{E}\tilde{X}\tilde{Y}}{\mathbb{E}\tilde{X}^2}$ do $g(a)$ z důkazu vlastnosti (ii), dostáváme (všimněte si, že jde o bod, kde funkce g nabývá svého minima) $0 = \mathbb{E} \left[\frac{\mathbb{E}\tilde{X}\tilde{Y}}{\mathbb{E}\tilde{X}^2} \tilde{X} - \tilde{Y} \right]^2$, a tedy musí platit $P[a\tilde{X} - \tilde{Y} = 0] = 1$. Pak s pravděpodobností 1 musí platit $aX - a\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = Y$, což jsme chtěli dokázat (stačí vzít $b = -a\mathbb{E}X - \mathbb{E}Y$). \square

Jednoduchým důsledkem tohoto tvrzení (plyne z důkazu poslední vlastnosti z Věty 3.13) je následující tvrzení umožňující počítat rozptyl součtu ne nutně nezávislých veličin.

Důsledek 3.17 (Rozptyl součtu). *Pokud $X_1, \dots, X_d \in \mathcal{L}^2$ a a_1, \dots, a_d jsou reálné konstanty, potom*

$$\text{Var} \left(\sum_{l=1}^d a_l X_l \right) = \sum_{l=1}^d a_l^2 \text{Var} X_l + 2 \sum_{1 \leq j < l \leq d} a_j a_l \text{Cov}(X_j, X_l).$$

Pro vícerozměrné náhodné vektory můžeme definovat obdobné pojmy jako pro náhodné veličiny.

Definice 3.18. *Střední hodnotu náhodného vektoru $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ definujeme předpisem*

$$\mathbb{E}\vec{X} = [\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_d]^T.$$

Varianční-kovarianční matice náhodného vektoru $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ je definována jako

$$\text{Var} \vec{X} = \begin{bmatrix} \text{Var} X_1 & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_d) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var} X_2 & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_d, X_1) & \text{Cov}(X_d, X_2) & \cdots & \text{Var}(X_d) \end{bmatrix}.$$

Všimneme si, že platí $\text{Cov}(X, X) = \text{Var} X$ a $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$. Z toho plyne, že takto definovaná kovarianční matice je symetrická a navíc $\text{Var} \vec{X} [\text{Cov}(X_i, X_j)]_{i,j=1\dots d}$.

konec 9. přednášky (17.3.2025)

Budeme pokračovat základními vlastnostmi variančních matic, které se chovají podobně rozptylu jednorozměrné náhodné veličiny.

Věta 3.19 (Vlastnosti varianční matice). *Máme-li náhodný vektor \vec{X} a reálné vektory \vec{a}, \vec{b} takové, že následující výrazy mají smysl, potom*

$$\mathbb{E}(\vec{a}^T \vec{X} + \vec{b}) = \vec{a}^T \mathbb{E}\vec{X} + \vec{b}, \text{Var}(\vec{a}^T \vec{X} + \vec{b}) = \vec{a}^T (\text{Var} \vec{X}) \vec{a}.$$

Máme-li náhodný vektor \vec{X} a \vec{A}, \vec{B} jsou reálné matice, pak

$$\mathbb{E}(A\vec{X} + B) = A\mathbb{E}\vec{X} + B, \text{Var}(A\vec{X} + B) = A(\text{Var} \vec{X})A^T.$$

Důkaz. Z definice násobení matic a linearity operátoru \mathbb{E} . \square

Definice 3.20. Pro danou náhodnou veličinu X definujeme *momentovou vytvořující funkci* (MGF) vztahem

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)] = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dP_X(x)$$

pro $t \in \mathbb{R}$, pokud pravá strana existuje. Speciální případ $\psi_X(-t)$ nazýváme *Laplaceovou transformací* X .

Věta 3.21 (Vlastnosti MGF). *Platí následující vlastnosti MGF:*

- (i) *Existuje-li $\varepsilon > 0$ takové, že na $(-\varepsilon, \varepsilon)$ existuje $\psi_X(t)$, potom $\psi_X^{(m)}(0) = \mathbb{E}X^m$, $m \in \mathbb{N}_0$;*
- (ii) *Pokud $Y = aX + b$, pak $\psi_Y(t) = e^{bt}\psi_X(at)$;*
- (iii) *Pokud X_1, \dots, X_d jsou nezávislé a $Y = \sum_{l=1}^d X_l$, pak platí $\psi_Y(t) = \prod_{l=1}^d \psi_{X_l}(t)$.*

Důkaz. Dokážeme první vlastnost. Příklad $m = 0$ je triviální, nechť tedy máme $m > 0$. Nejdříve budeme uvažovat případ $m = 1$ a chceme použít větu o konvergentní majorantě. Nechť tedy

$$g(x) := e^{\frac{-\varepsilon x}{2}} + e^{\frac{\varepsilon x}{2}},$$

potom platí $\exp tx \leq g(x)$ pro všechna $t \in [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$ a libovolné $x \in \mathbb{R}$. Dále z předpokladu máme, že

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X(x) = \psi_X(-\varepsilon/2) + \psi_X(\varepsilon/2) < +\infty.$$

Dostáváme, že g je hledaná konvergentní majoranta. Z věty o konvergentní majorantě tedy můžeme provést záměnu integrálu a derivace.

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x e^{tx} dP_X(x) \stackrel{t=0}{=} \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x) = \mathbb{E}X^1.$$

Zbytek se dokáže indukcí s použitím podobné majoranty, v m -tém kroku dostaneme $\int_{\mathbb{R}} x^m dP_X(x) =: \mathbb{E}X^m$.

Druhou vlastnost dokážeme přímým rozepsáním definice

$$\begin{aligned} \psi_Y(t) &= \psi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}[\exp(taX + tb)] = \mathbb{E}[\exp\{atX\}e^{tb}] = \\ &= e^{tb}\mathbb{E}[\exp(atX)] = e^{tb}\psi_X(at). \end{aligned}$$

Nakonec, poslední vlastnost se dokáže následně

$$\psi_Y(t) = \psi_{\sum_{l=1}^d X_l}(t) = \mathbb{E}[\exp\{t \sum_{l=1}^d X_l\}] = \mathbb{E}\left[\prod_{l=1}^d e^{tX_l}\right].$$

Dále využijeme nezávislost (která se přenáší i na veličiny transformované stejnou měřitelnou funkcí) a dostaneme

$$\mathbb{E} \left[\prod_{l=1}^d e^{tX_l} \right] = \prod_{l=1}^d \mathbb{E}(e^{tX_l}) = \prod_{l=1}^d \psi_{X_l}(t).$$

□

Poznámka: pokud $\psi_X(t) = \psi_Y(t)$ pro všechna t v nějakém otevřeném intervalu kolem 0, pak X a Y se rovnají v distribuci.

Definice 3.22. Pro danou náhodnou veličinu X definujeme *charakteristickou funkci* (CF) vztahem

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(itX)] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_X(x)$$

pro $t \in \mathbb{R}$.

Na rozdíl od momentové vytvořující funkce takto definovaná charakteristická funkce je dobře definovaná pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Opět máme speciální název pro vyhodnocení charakteristické funkce v bodě $-t$, říkáme tomu *Fourierova transformace*. Z definice exponenciály z komplexní analýzy okamžitě dostáváme vyjádření $\phi_X(t) = \mathbb{E} \cos(tX) + i\mathbb{E} \sin(tX)$.

Věta 3.23 (Vlastnosti CF). *Platí následující vlastnosti CF:*

- (i) φ_X existuje pro jakékoli rozdělení X ;
- (ii) $\varphi_X(0) = 1$;
- (iii) $|\varphi_X(t)| \leq 1$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$;
- (iv) φ_X je stejnoměrně spojitá, tedy $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| \leq \varepsilon$ kdykoli $|t - s| \leq \delta$;
- (v) $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \varphi_X(at)$ pro všechna $t, a, b \in \mathbb{R}$;
- (vi) $\varphi_{-X}(t) = \bar{\varphi}_X(t)$ (komplexně sdružená funkce);
- (vii) $\varphi_X(t) \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R}$ právě tehdy když rozdělení je symetrické kolem bodu $t = 0$.
- (viii) Jsou-li X, Y nezávislé, potom $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t)$.

Důkaz. Budeme dokazovat vlastnosti postupně

- (i) Víme, že pro všechna x a všechna t platí $|e^{itx}|^2 = \sin^2(tx) + \cos^2(tx) = 1$. Pak $\mathbb{E}|e^{itx}|^2 = 1$, z Jensenovy nerovnosti (bude později) máme, že $\mathbb{E}|e^{itx}| \leq \sqrt{\mathbb{E}|e^{itx}|^2} = 1$ a tedy e^{itx} je integrovatelná.
- (ii) Přímým dosazením dostaneme $\int_{\mathbb{R}} dP_X(x) = 1$.

(iii) Viz důkaz vlastnosti (i).

(iv) Položme $h := s - t$, potom

$$\begin{aligned} |\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| &= |\mathbb{E}[e^{itX}] - \mathbb{E}[e^{i(t+h)X}]| \leq \\ &= \mathbb{E}[|e^{itX}(1 - e^{ihX})|] \leq \\ &= \mathbb{E}[|e^{itX}| \cdot |1 - e^{ihX}|] \leq \mathbb{E}[|e^{ihX} - 1|]. \end{aligned}$$

Víme, že $e^{ihX} - 1 \rightarrow 0$ když $h \rightarrow 0$ a zároveň $|e^{ihX} - 1| \leq 2$. Máme tedy konvergentní majorantu. Dle Lebesgueovy věty tedy platí $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}[e^{ihX} - 1] = 0$. Z toho již plyne stejnoměrná spojitost.

(v) Z definice dostáváme

$$\varphi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}[e^{it(aX+b)}] = e^{ibt} \mathbb{E}[e^{itaX}] = e^{ibt} \varphi_X(at).$$

(vi) Využijeme přepisu do goniometrického tvaru (viz poznámka před touto větou), dostaneme

$$\varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}[\cos(-tX) + i \sin(-tX)] = \mathbb{E}[\cos(tX) - i \sin(tX)] = \bar{\varphi}_X(t).$$

(vii) Necht' nejdříve X má rozdělení symetrické kolem 0, potom $X \stackrel{d}{=} -X$, z čehož máme $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(t)$. Aplikací již dokázané vlastnosti (v) máme, že $\varphi_X = \bar{\varphi}_X(t)$, tedy $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$. Opačná implikace se dokáže stejným postupem v opačném pořadí.

(viii) Rozepsání definice

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{itX} e^{itY}],$$

dále díky nezávislosti dostáváme

$$\mathbb{E}[e^{itX} e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{itX}] \mathbb{E}[e^{itY}] = \varphi_X(t) \varphi_Y(t).$$

□

Následující věta nám umožňuje jednoznačně popisovat rozdělení jak podle distribuční funkce, tak i podle charakteristické funkce.

Věta 3.24 (Leviho inverzní formule pro charakteristickou funkci). *Pro jakékoli rozdělení X a libovolné $a < b$ platí*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt = P[a < X < b] + \frac{P[X = a] + P[X = b]}{2}.$$

Důkaz. Mějme $T \in \mathbb{R}$ a $a < b$, potom

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{ita} - e^{itb}}{it} \varphi_X(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{ita} - e^{itb}}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_X = \\ \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{2\pi it} dP_X dt &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T}^T \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{2\pi it} dt dP_X. \end{aligned}$$

Všimneme si, že pro každou konstantu $c \in \mathbb{R}$ platí $\int_{-T}^T \frac{e^{itc}}{2it} dt = \int_0^T \frac{\sin(tc)}{t} dt$ a tento integrál se navíc rovná $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(c)$. Potom platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{ita} - e^{itb}}{it} \varphi_X(t) dt &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[\int_0^T \frac{\sin(t(x-a))}{t} dt - \int_0^T \frac{\sin(t(x-b))}{t} dt \right] dP_X. \end{aligned}$$

Když pošleme T do nekonečna, dostaneme následující hodnoty

$$\frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\sin(t(x-a))}{t} dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x < a, \\ \frac{1}{2}, & x > a, \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Potom

$$\frac{1}{\pi} \left[\int_0^T \frac{\sin(t(x-a))}{t} dt - \int_0^T \frac{\sin(t(x-b))}{t} dt \right] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = a, b \\ 1, & a < x < b, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dosazením do předchozího vzorce a užitím Lebesgueovy věty o konvergentní majorantě dostáváme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{ita} - e^{itb}}{it} \varphi_X(t) dt = P[a < X < b] + \frac{P[X = a] + P[X = b]}{2}.$$

□

Z předchozí věty okamžitě plyne následující důsledek.

Důsledek 3.25 (Jednoznačná charakterizace rozdělení). *Platí $\varphi_X = \varphi_Y \Leftrightarrow X \stackrel{d}{=} Y$.*

Nakonec definujeme charakteristickou funkci pro náhodné vektory. Obdobným způsobem pro ní můžeme dokázat vlastnosti, které jsme již dokázali pro jednorozměrné náhodné veličiny.

Definice 3.26. *Charakteristická funkce* náhodného vektoru $\vec{X} = [X_1, \dots, X_d]^T$ je definována vztahem

$$\varphi_{\vec{X}}^{\vec{t}} = \mathbb{E}[e^{it^T \vec{X}}] = \int_{\mathbb{R}} e^{it^T \vec{X}} dP_{\vec{X}}$$

pro $\vec{t} \in \mathbb{R}^d$.

konec 10. přednášky (18.3.2025)

4 Stochastické nerovnosti

V této kapitole budeme studovat užitečné nerovnosti, které budeme moci aplikovat pro odhady některých statistických veličin. Začneme odhady pro hodnoty pravděpodobnosti samotné (tzv. nerovnosti Markovovského typu)

Věta 4.1 (Markovova nerovnost). *Nechť X je nezáporná náhodná veličina a předpokládejme, že $\mathbb{E}X$ existuje. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ platí*

$$P[X \geq \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{E}X}{\varepsilon}.$$

Důkaz. Z předpokladu máme, že $X \geq 0$, tedy $P[X \geq 0] = 1$ a $P[X < 0] = 1 - 1 = 0$. Z toho plyne, že

$$\int_{\{\omega \in \Omega: X(\omega) < 0\}} dP(\omega) = 0.$$

Potom pro $\varepsilon > 0$ máme, že pravděpodobnost

$$\begin{aligned} P[X \geq \varepsilon] &= \int_{\{\omega \in \Omega: X(\omega) \geq \varepsilon\}} dP(\omega) \leq \int_{\{\omega \in \Omega: X(\omega) \geq \varepsilon\}} \frac{X(\omega)}{\varepsilon} dP(\omega) \leq \\ &\int_{\Omega} \frac{X(\omega)}{\varepsilon} dP(\omega) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \frac{\mathbb{E}X}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

kde první nerovnost platí díky tomu, že $X(\omega) > \varepsilon$ a tedy $\frac{X(\omega)}{\varepsilon} > 1$. \square

Důsledek 4.2 (Zobecněná Markovova nerovnost). *Nechť X je nezáporná náhodná veličina a předpokládejme, že $\mathbb{E}X^r$ existuje pro nějaké $r > 0$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ platí*

$$P[X \geq \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{E}X^r}{\varepsilon^r}.$$

Důkaz. Nechť $Y := X^r$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^r$, poté použijeme předchozí větu pro $P[Y \leq \tilde{\varepsilon}]$. \square

Věta 4.3 (Čebyševova nerovnost). *Nechť X je náhodná veličina a předpokládejme, že $\mathbb{E}[X]$ existuje, potom pro každé $\varepsilon > 0$ platí*

$$P[|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon] \leq \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2}.$$

Důkaz. Položme $Y = |X - \mathbb{E}X| \geq 0$ a $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^2$, potom stačí aplikovat Větu 4.1. \square

Dále si uvedeme několik nerovností, které přímo poskytují odhad pro střední hodnotu.

Věta 4.4 (Cauchy-Schwarzova nerovnost). *Pokud mají náhodné veličiny X a Y konečné rozptyly, potom*

$$|\mathbb{E}XY| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2 \mathbb{E}Y^2} \text{ a } |\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var } X \text{Var } Y}.$$

Důkaz. Plyne z důkazu vlastnosti (ii) ve Větě 3.16 o vlastnostech kovariance a korelace. \square

Věta 4.5 (Jensenova nerovnost). *Pokud je g konvexní, pak $\mathbb{E}g(X) \geq g(\mathbb{E}X)$. Dále, pokud je g konkávní $\mathbb{E}g(X) \leq g(\mathbb{E}X)$.*

Důkaz. Necht máme $t(x) = a + tx$ tečna k funkci g v bodě $\mathbb{E}X$. Pokud g je konvexní, pak $t(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Také platí $t(\mathbb{E}X) = g(\mathbb{E}X)$. Potom $E[g(X)] \geq E[t(X)] = E[a + bX] = a + b\mathbb{E}X = t(\mathbb{E}X) = g(\mathbb{E}X)$. Pro konkávní g se tvrzení dokáže analogicky. \square

5 Stochastické konvergence

V této kapitole budeme studovat druhy konvergence v pravděpodobnostních prostorech, které jsou často jiné, neboť náš prostor je vždy normovaný na 1.

Definice 5.1. Necht X_1, X_2, \dots je posloupnost náhodných veličin a necht X je jiná náhodná veličina. Necht F_n označuje distribuční funkci X_n a necht F označuje distribuční funkci X . Potom X_n konverguje k X v pravděpodobnosti (předpokládáme, že X_i, X všechny “žijí” na stejném pravděpodobnostním prostoru), značíme $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$,

$$P[|X_n - X| > \varepsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dále X_n konverguje k X v distribuci, značíme $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} X$, pokud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

pro všechna x kde je F spojitá.

X_n konverguje k X v L_p pro $p \geq 1$, značíme $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} X$, pokud

$$\mathbb{E}|X_n - X|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

X_n konverguje k X skoro jistě, značíme $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P-s.j.} X$, pokud

$$P[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X] \equiv P[\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)] = 1.$$

Věta 5.2 (Implikace mezi typy konvergence). *Platí následující implikace*

$$(i) \quad X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P-s.j.} X \implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X;$$

$$(ii) \quad \text{pro } p \geq 1 \text{ platí } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} X \implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X;$$

$$(iii) \quad \text{pro } p \geq q \geq 1 \text{ platí } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} X \implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_q} X;$$

$$(iv) \quad X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} X;$$

$$(v) \quad \text{Pokud } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} X \text{ a } P[X = c] = 1 \text{ pro nějaké } c \in \mathbb{R}, \text{ pak } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X.$$

konec 11. přednášky (24.3.2025)

Důkaz. Budeme dokazovat postupně každou implikaci.

(i) Mějme $\varepsilon > 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme náhodné události

$$A_n := \{\omega \in \Omega : \exists m \geq n : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\};$$

$$B_n := \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}.$$

Chceme ukázat, že $P(B_n) \rightarrow 0$. Víme, že $A_n \supseteq B_n$, tedy díky monotonii pravděpodobnosti stačí ukázat, že $P(A_n) \rightarrow 0$. Reálná posloupnost $\{X_m(\omega)\}_m$ je konvergentní, jestliže existuje přirozené číslo N takové, že pro žádné $m \geq N$ neplatí $|X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon$. Potom $\lim A_n$ je jev, že posloupnost $\{X_m(\omega)\}_m$ diverguje. Ale dle předpokladu X_n konverguje skoro jistě, tedy $P(\lim A_n) = 0$. Jelikož $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, z věty o spojitosti míry (Věta 1.7) dostáváme $P(\lim A_n) = \lim P(A_n) = 0$, čímž jsme dostali požadovanou konvergenci v pravděpodobnosti.

(ii) Nechť $X_n \xrightarrow{L_p} X$. Podle Markovovy nerovnosti (Věta 4.1) platí

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = P(|X_n - X|^p \geq \varepsilon^p) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n - X|^p}{\varepsilon^p} \rightarrow 0$$

pro $n \rightarrow \infty$, neboť se jedná o posloupnost čísel a chování čitatele vyplývá z předpokladu konvergence v L_p .

(iii) Nechť $X_n \xrightarrow{L_p} X$ a $p \geq q \geq 1$. Dle Jensenovy nerovnosti pro konvexní funkci (Věta 4.5) $g(x) := x^{p/q}$ pro $x \geq 0$ dostáváme $g(\mathbb{E}[|X_n - X|^q]) \leq \mathbb{E}[|X_n - X|^{q \cdot \frac{p}{q}}] = \mathbb{E}|X_n - X|^p \rightarrow 0$, kde limitní přechod plyne z předpokladu konvergence v L_p , tedy jsme přímo ukázali konvergenci v L_q .

(iv) Nechť $X_n \xrightarrow{P} X$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Nechť $x \in \mathbb{R}$ je libovolný bod, v němž je limitní distribuční funkce F spojitá. Potom můžeme psát

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(X_n \leq x) = P(X_n \leq x, X \leq x + \varepsilon) + P(X_n \leq x, X > x + \varepsilon) \leq \\ &= P(X \leq x + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon) = F(x + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon). \end{aligned}$$

Taktéž dostaneme

$$\begin{aligned} F(x - \varepsilon) &= P(X \leq x - \varepsilon) = P(X \leq x - \varepsilon, X_n \leq X) + \\ &+ P(X \leq x - \varepsilon, X_n > \varepsilon) \leq F_n(x) + P(|X_n - X| > \varepsilon). \end{aligned}$$

Potom $F(x - \varepsilon) - P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq F_n(x) \leq F(x + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$. Jelikož $\varepsilon > 0$ bylo voleno libovolně a F je spojitá v x , tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$.

(v) Nechť $X_n \xrightarrow{D} X$ a nechť $P[X = c] = 1$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a můžeme počítat

$$\begin{aligned} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) &= P(X_n \leq c - \varepsilon) + P(X_n \geq c + \varepsilon) \leq \\ &= P(X_n \leq c - \varepsilon) + P(X_n > c + \frac{\varepsilon}{2}) \leq \\ &= F_n(c - \varepsilon) + 1 - F_n(c + \frac{\varepsilon}{2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

čímž jsme dokončili důkaz této věty.

□

Uvedeme si několik protipříkladů, na kterých si ukážeme, že implikace opačné k právě uvedeným nemusí platit.

Příklad 5.3. Ukážeme, že konvergence v pravděpodobnosti neimplikuje konvergenci skoro jistě. Mějme prostor $(\Omega = [0, 1], \mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega), P = \lambda)$. Každé přirozené číslo můžeme jednoznačně zapsat ve tvaru $2^n + m$, kde $m \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ a definovat

$$X_{2^n+m}(\omega) = \chi_{\{\omega \in (m2^{-n}, (m+1)2^{-n}]\}}, \omega \in [0, 1].$$

Například, protože $33 = 2^5 + 1$, dostaneme $X_{33}(\omega) = \chi_{\{\omega \in (2^{-5}, 2^{-4}]\}}$. Pak pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$ dostaneme $P[|X_{2^n+m}| > \varepsilon] = 2^{-n} \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. Tedy $X_n \xrightarrow{P} 0$. Avšak pro každé $\omega \in (0, 1]$, $X_j(\omega) = 1$ a $X_j(\omega) = 0$ pro nekonečně mnoho různých j a tedy posloupnost X_n nekonverguje skoro jistě.

Příklad 5.4. Ukážeme, že konvergence v pravděpodobnosti neimplikuje konvergenci v L_p . Mějme prostor $(\Omega = [0, 1], \mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega), P = \lambda)$. Každé přirozené číslo můžeme jednoznačně zapsat ve tvaru $2^n + m$, kde $m \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ a definovat

$$X_{2^n+m}(\omega) = 2^n \chi_{\{\omega \in ((m-1)2^{-n}, m2^{-n}]\}}, \omega \in [0, 1].$$

Pak opět pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$ dostaneme $P[|X_{2^n+m}| > \varepsilon] = 2^{-n} \rightarrow 0$. Tedy $X_n \xrightarrow{P} 0$. Nicméně, $\mathbb{E}|X_{2^n+m} - 0| = 2^n P[X_{2^n+m} = 2^n] = 2^n 2^{-n} = 1$ a tedy posloupnost nekonverguje v L_1 , tedy to nemůže konvergovat ani v vyšších $L_p, p > 1$.

Příklad 5.5. Ukážeme, že konvergence v L_q neimplikuje konvergenci v L_p pro $p > q \geq 1$. Mějme prostor $(\Omega = [0, 1], \mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega), P = \lambda)$. Každé přirozené číslo můžeme jednoznačně zapsat ve tvaru $2^n + m$, kde $m \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ a definovat

$$X_{2^n+m}(\omega) = 2^{n/2} \chi_{\{\omega \in ((m-1)2^{-n}, m2^{-n}]\}}, \omega \in [0, 1].$$

Pak $\mathbb{E}|X_{2^n+m} - 0| = 2^{n/2} P[X_{2^n+m} = 2^{n/2}] = 2^{n/2} 2^{-n} = 2^{-n/2}$ a tedy posloupnost konverguje v L_1 . Nicméně, pro $p = 2$ máme $\mathbb{E}|X_{2^n+m} - 0|^2 = 2^{2(n/2)} 2^{-n} = 1$ a tedy posloupnost nekonverguje v L_2 .

Příklad 5.6. Ukážeme, že konvergence v distribuci neimplikuje konvergenci v pravděpodobnosti. Nechť $X \sim N(0, 1)$ a $X_n := -X, n \in \mathbb{N}$. Tedy $X_n \sim N(0, 1)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy triviálně $\lim F_n(x) = F(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Tedy $X_n \xrightarrow{D} X$.

Nicméně, $P[|X_n - X| > \varepsilon] = P[|2X| > \varepsilon] = P[|X| > \varepsilon/2] \neq 0$ (nezávislé na n), tedy posloupnost X_n nekonverguje v pravděpodobnosti.

Věta 5.7 (o spojitém zobrazení (CMT)). *Nechť $\vec{X}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots$ jsou d -rozměrné náhodné vektory a $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitá v každém bodě množiny C takové, že $P[\vec{X} \in C] = 1$. Potom platí*

- $\vec{X}_n \xrightarrow{P-s.j.} \vec{X} \implies g(\vec{X}_n) \xrightarrow{P-s.j.} g(\vec{X});$
- $\vec{X}_n \xrightarrow{P} \vec{X} \implies g(\vec{X}_n) \xrightarrow{P} g(\vec{X});$
- $\vec{X}_n \xrightarrow{D} \vec{X} \implies g(\vec{X}_n) \xrightarrow{D} g(\vec{X}).$

Důkaz. Dokážeme pouze první dvě vlastnosti. Nejdříve, nechť X_n konverguje skoro jistě, potom ze spojitosti g máme, že vlastnost $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ implikuje $\lim_{n \rightarrow \infty} g(X_n(\omega)) = g(X(\omega))$. Potom $P[\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} g(X_n(\omega)) = g(X(\omega))] = P[\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)] = 1$, přičemž poslední rovnost plyne z definice konvergence skoro jistě.

K důkazu druhé vlastnosti zvolme $\varepsilon > 0$. Potom uvažujeme pro libovolné $\delta > 0$ množinu

$$B_\delta := \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \wedge |g(x) - g(y)| \geq \varepsilon\}.$$

konec 12. přednášky (25.3.2025)

Zřejmě $B_\delta \rightarrow \emptyset$ pro $\delta \rightarrow 0^+$. Potom můžeme psát

$$P(|g(\vec{X}_n) - g(\vec{X})| \geq \varepsilon) = P(|g(\vec{X}_n) - g(\vec{X})| \geq \varepsilon \cap |\vec{X}_n - \vec{X}| \geq \delta) +$$

$$P(|g(\vec{X}_n) - g(\vec{X})| \geq \varepsilon \cap |\vec{X}_n - \vec{X}| < \delta) \leq P(|\vec{X}_n - \vec{X}| \geq \delta) + P(\vec{X} \in B_\delta).$$

Jelikož δ bylo voleno libovolně, platí $P(\vec{X} \in B_\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ a $P(|\vec{X}_n - \vec{X}| \geq \delta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, čímž jsme dokázali konvergenci v pravděpodobnosti. \square

Poznámka: z $\vec{X}_n \xrightarrow{L_p} \vec{X}$ nutně neplyne $g(\vec{X}_n) \xrightarrow{L_p} g(\vec{X})$.

Dalším významným tvrzením teorie pravděpodobnosti je takzvaná Slutského věta (v anglické literatuře se také používá název Cramer-Slutského věta).

Věta 5.8 (Slutského věta). *Pokud $X_n \xrightarrow{D} X$ a $Y_n \xrightarrow{P} c \in \mathbb{R}$, pak $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$ a $X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$.*

Důkaz. Dokážeme pouze výrok pro součet, část pro součin se dokáže analogicky.

Mějme $x \in \mathbb{R}$ bod, v němž je spojitá distribuční funkce veličiny $X + c$. Potom $x - c$ je nutně bodem spojitosti distribuční funkce F_X . Zvolme $\eta > 0$. Potom existuje $\varepsilon_0 > 0$ takové, že $|F_X(x - c) - F_X(x - c - \varepsilon)| < \frac{\eta}{3}$ pro každé $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Jelikož F_X je distribuční funkce, má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti. Dokážeme tuto vlastnost. Nechť tedy D je množina bodů nespojitosti F_X . Pak $\forall y \in D : F_X(y_-) < F_X(y^+)$, tedy existuje racionální číslo $q_y \in \mathbb{Q}$ takové, že $F_X(y_-) < q_y < F_X(y^+)$. Jelikož F_X je neklesající, pak $y \neq z \in D \implies q_y \neq q_z$. Tedy zobrazení $y \mapsto q_y$ je prosté.

Z toho máme, že v každém okolí bodu $x - c$ můžeme nalézt vlevo i vpravo od $x - c$ nějaký bod, v němž je F_X spojitá. Z definice spojitosti existuje $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ takové, že F_X je spojitá v $x - c + \varepsilon$ i v $x - c - \varepsilon$. Potom

$$P(X_n + Y_n \leq x) = P(X_n + Y_n \leq x \cap |Y_n - c| < \varepsilon) + P(X_n + Y_n \leq x \cap |Y_n - c| \geq \varepsilon) \leq$$

$$P(X_n + c \leq x + \varepsilon \cap |Y_n - c| < \varepsilon) + P(|Y_n - c| \geq \varepsilon) \leq \\ P(X_n \leq x - c + \varepsilon) + P(|Y_n - c| \geq \varepsilon).$$

Jelikož F_X je spojitá v bodě $x - c + \varepsilon$ a $Y_n \xrightarrow{P} c$, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_1$ platí $P(X_n \leq x - c + \varepsilon) \leq P(X_n \leq x - c) + \frac{\eta}{3}$ a zároveň $P(|Y_n - c| \geq \varepsilon) \leq \frac{\eta}{3}$. Dohromady pro $n \geq n_1$ máme

$$P(X_n + Y_n \leq x) \leq P(X \leq x - c + \varepsilon) + \frac{2}{3}\eta \leq P(X \leq x - c) + \eta.$$

Opačná nerovnost se dokáže analogicky. Pro $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ dohromady máme

$$P(X + c \leq x) - \eta \leq P(X_n + Y_n \leq x) \leq P(X + c \leq x) + \eta.$$

Jelikož $\eta > 0$ bylo voleno libovolně, věta je dokázána. \square

Z této věty okamžitě plyne následující důsledek (neboť konvergence v pravděpodobnosti implikuje konvergenci v distribuci, viz Věta 5.2, vlastnosti (iv) a (v)).

Důsledek 5.9. *Pokud $x_n \xrightarrow{P} a \in \mathbb{R}$ a $Y_n \xrightarrow{P} b \in \mathbb{R}$, potom $X_n + Y_n \xrightarrow{P} a + b$ a $X_n Y_n \xrightarrow{P} ab$.*

Ještě budeme potřebovat následující větu, která ekvivalentně charakterizuje konvergenci v distribuci, její důkaz je však aktuálně nad naše schopnosti.

Věta 5.10 (Lévyho věta o spojitosti). *Platí $\vec{X}_n \xrightarrow{D} \vec{X} \Leftrightarrow \varphi_{\vec{X}_n}(\vec{t}) \rightarrow \varphi_{\vec{X}}(\vec{t})$ pro všechna $\vec{t} \in \mathbb{R}^d$.*

Ukážeme si explicitní vyjádření charakteristické funkce normálního rozdělení.

Příklad 5.11. Necht $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Potom platí

$$\varphi_X(t) = \exp \left\{ i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \right\}.$$

Důkaz. Nejdříve uvažujme $X \sim N(0, 1)$ standardní normální rozdělení. Potom

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\exp\{itx\}] = \mathbb{E}[\cos(tx)] + i\mathbb{E}[\sin(tx)] = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) dP_X + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) dP_X = \mathbb{E}[\cos(tX)],$$

kde poslední rovnost plyne z faktu, že \sin je lichá funkce, a tedy příslušný integrál je nulový. Zderivujeme $\varphi_X(t)$ s použitím majoranty x .

$$\frac{d}{dt} \varphi_X(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} x \sin(tx) dP_X = - \int_{-\infty}^{\infty} x \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} dx =$$

$$\stackrel{p.p.}{=} [x \sin(tx) f_X(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} t \cos(tx) f_X(x) dx = -t \mathbb{E}[\cos(tX)].$$

Dostali jsme, že $\frac{d}{dt} \varphi_X(t) = -t \varphi_X(t)$. Tato diferenciální rovnice s počáteční podmínkou $\varphi_X(0) = \cos 0 = 1$ má jediné řešení $\varphi_X(t) = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\}$.

Potom pro $Y = \mu + \sigma X$ ($Y \sim N(\mu, \sigma^2)$) dosadíme a aplikujeme výsledek pro standardní rozdělení, dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \mathbb{E}[\exp\{itY\}] = E[\exp\{it(\mu + \sigma X)\}] = \\ &= \exp\{it\mu\} \cdot \mathbb{E}[\exp\{i(t\sigma)X\}] = \exp \left\{ it\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right\}. \end{aligned}$$

□

konec 13. přednášky (31.3.2025)

Definice 5.12. *Posloupností nezávislých náhodných veličin* rozumíme posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ takovou, že pro každou $J \subset \mathbb{N}$, $|J| < \infty$ a všechna $\{x_j\}_{j \in J}$ platí

$$F_{\{X_j\}_{j \in J}}(\{x_j\}_{j \in J}) = \prod_{j \in J} F_{X_j}(x_j).$$

Definice 5.13. $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je *posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin (IID)*, jestliže to je posloupnost nezávislých náhodných veličin majících stejnou distribuční funkci.

Tyto definice lze celkem snadno přepsat i pro náhodné vektory (cvičení).

Věta 5.14 (Slabý zákon velkých čísel). *Jestliže $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je IID posloupnost náhodných veličin a $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, pak*

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathbb{E}X_1.$$

Důkaz. Rozvineme komplexní exponenciálu do Taylorova rozvoje do prvního řádu. Platí $e^{ity} = 1 + ity + o(t)$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$. Potom $\mathbb{E}[e^{itY}] = 1 + it\mathbb{E}Y + o(t)$. Dále můžeme počítat

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{X}_n}(t) &= \varphi_{\frac{1}{n} \sum X_i}(t) = \varphi_{\sum \frac{X_i}{n}}(t) = \left(\varphi_{\frac{X_1}{n}}(t) \right)^n = \left(\varphi_{X_1} \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n = \\ &= \left(\mathbb{E}[e^{\frac{itX_1}{n}}] \right)^n = \left(1 + \frac{it}{n} \mathbb{E}X_1 + o \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n. \end{aligned}$$

Pro $n \rightarrow \infty$ dále máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\bar{X}_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{it}{n} \mathbb{E}X_1 + o \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}[e^{it\mathbb{E}X_1/n}])^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{it\mathbb{E}X_1/n})^n = e^{it\mathbb{E}X_1} = \varphi_{\mathbb{E}X_1}(t).$$

Z Lévyho věty (Věta 5.10) tedy dostáváme konvergenci $\bar{X}_n \xrightarrow{D} \mathbb{E}X_1$ v distribuci. Dále využijeme faktu, že jestliže posloupnost konverguje v distribuci ke konstantě, potom máme i konvergenci v pravděpodobnosti, čímž je důkaz ukončen. \square

Jestliže konvergenci v pravděpodobnosti nahradíme konvergencí skoro jistě, dostaneme silný zákon velkých čísel. Jeho důkaz je však nad rámec tohoto kurzu. Kdybychom předpokládali, že $\text{Var } X_1 < \infty$, pak tvrzení plyne okamžitě z Čebyševovy nerovnosti (Věta 4.3).

Věta 5.15 (Centrální limitní věta). *Pokud $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost IID náhodných veličin s $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$ a $\text{Var } X_1 > 0$, pak*

$$Z_n := \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}X_1}{\sqrt{\text{Var } X_1}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0, 1).$$

Jinými slovy, pro všechna $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[Z_n \leq x] = \Phi(x) \equiv \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Zkráceně tedy máme $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, 1)$.

Důkaz. Tentokrát budeme potřebovat rozvoj exponenciály do druhého řádu. Je tedy $e^{ity} = 1 + ity + \frac{(ity)^2}{2} + o(t^2)$. Potom také $\mathbb{E}[e^{itY}] = 1 + it\mathbb{E}Y - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}Y^2 + o(t^2)$.

Definujme $Y_n := \frac{(\bar{X}_n - \mathbb{E}X_1)}{\sqrt{\text{Var } X_1}}$. Pak $\mathbb{E}Y_n = 0$, $\text{Var } Y_n = 1$ a platí

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i = \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right) = \sqrt{n} \bar{Y}_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}X_1}{\sqrt{\text{Var } X_1}} =: Z_n$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dále můžeme počítat

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(t) &= \varphi_{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} Y_i}(t) = \left(\varphi_{\frac{Y_1}{\sqrt{n}}}(t) \right)^n = \left(\varphi_{Y_1} \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{it}{\sqrt{n}} \mathbb{E}Y_1 - \frac{t^2}{2n} \mathbb{E}Y_1^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right)^n, \end{aligned}$$

neboť $\mathbb{E}Y_1 = 0$ a $\mathbb{E}Y_1^2 = \text{Var } Y_1 = 1$. Jelikož $e^y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$, dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Z_n}^t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t^2}{2n} \right)^n = e^{-\frac{1}{2}t^2} = \varphi_Z(t),$$

kde $Z \sim N(0, 1)$. Z Lévyho věty (Věta 5.10) je konvergence charakteristických funkcí ekvivalentní konvergenci v distribuci, čímž je důkaz ukončen. \square

Následující věta nám umožní zformulovat mnohorozměrnou verzi centrální limitní věty.

Věta 5.16 (Cramér-Woldova věta). *Platí $\vec{X}_n \xrightarrow{D} X$ právě tehdy, když pro všechna $\vec{t} \in \mathbb{R}^d$ platí $\vec{t}^T \vec{X}_n \xrightarrow{D} \vec{t}^T X$.*

Důkaz. Důkaz plyne okamžitě z Věty 5.10 a spojitosti lineárních zobrazení. \square

Věta 5.17 (Mnohorozměrná CLT). *Pokud $\{\vec{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je IID posloupnost d -rozměrných náhodných vektorů s pozitivně definitní varianční-kovarianční maticí $\text{Var } \vec{X}_1$, pak*

$$\sqrt{n}(\vec{X}_n - \mathbb{E}\vec{X}_1) \xrightarrow{D} N_d(\vec{0}, \text{Var } \vec{X}_1), n \rightarrow \infty.$$

Věta 5.18 (Delta metoda). *Pokud $\sqrt{n}(Y_n - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$ a g je spojitě diferencovatelná v okolí μ taková, že $g'(\mu) \neq 0$, pak*

$$\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu)) \xrightarrow{D} N(0, (g'(\mu))^2 \sigma^2).$$

Důkaz. Podle věty o střední hodnotě dostáváme $g(Y_n) = g(\mu) + g'(\tilde{\mu})(Y_n - \mu)$, kde $\tilde{\mu}$ leží mezi Y_n a μ . Když $\sqrt{n}(Y_n - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$, potom $Y_n - \mu \xrightarrow{D} 0$. Pak tedy i $Y_n - \mu \xrightarrow{P} 0$. Jelikož $|\tilde{\mu} - \mu| \leq |Y_n - \mu|$, musí platit, že $\tilde{\mu} - \mu \xrightarrow{P} 0$. Dle věty o spojitém zobrazení (Věta 5.7) dostáváme $g'(\tilde{\mu}) \xrightarrow{P} g'(\mu)$ (předpokládáme spojitost g').

Dále můžeme dosadit $\sqrt{n}[g(Y_n) - g(\mu)] = g'(\tilde{\mu})\sqrt{n}(Y_n - \mu)$. Nakonec, ze Slutského věty (Věta 5.8) máme (využili jsme předpoklad, že $\sqrt{n}(Y_n - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$)

$$\sqrt{n}[g(Y_n) - g(\mu)] \xrightarrow{D} N(0, [g'(\mu)]^2 \sigma^2).$$

\square

Obdobně se dá zformulovat i mnohorozměrná delta-metoda (za předpokladu nenulovosti jakobiánu g).

konec 14. přednášky (1.4.2025)

A Ukázková zápočtová písemka – Varianta A

Příklad A.1. V šesti urnách máme v každé 10 míčků. V jedné urně je osm černých, ve dvou urnách je po pěti černých a ve třech urnách je po k černých. Zbylé míčky jsou bílé.

- (a) Nechť $k = 3$. Z náhodně vybrané urny jsem s vracením vytáhl dva míčky, oba bílé. S jakou pravděpodobností bylo v urně pět černých míčků?

Nechť V_i je událost, že byla vybrána urna s i bílými míčky, H je událost, že oba vytážené míčky jsou bílé. Z Bayesovy věty (Věta 1.15) máme, že $P(V_5|H) = P(H|V_5) \frac{P(V_5)}{P(H)}$. Dále máme, že $P(H|V_5) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ a $P(V_5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Nakonec spočteme

$$P(H) = \sum_i P(H|V_i)P(V_i) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{6} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{67}{200}.$$

Dosazením do výše uvedeného vzorce dostáváme $P(V_5|H) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{200}{67} = \frac{50}{201}$.

- (b) Kolik musí být k , aby pravděpodobnost vytážení černého míčku z náhodně vybrané urny byla $\frac{1}{2}$.

Využijeme větu o úplné pravděpodobnosti (Věta 1.14). Nechť B, W jsou jevy, že jsme vytáhli černý/bílý míček a A_i reprezentuje jev, že byla vybrána i -tá urna. Platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = P[B] &= \sum_{i=1}^n P[B|A_i]P[A_i] = \underbrace{P[B|A_1]A_1}_{\frac{8}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{15}} + \underbrace{2 \cdot P[B|A_2]A_2}_{2 \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}} + \\ &\underbrace{3 \cdot P[B|A_4]P[A_4]}_{3 \cdot \frac{k}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{k}{20}} = \frac{2}{15} + \frac{1}{6} + \frac{k}{20} = \frac{6+k}{20}. \end{aligned}$$

Vyřešením této lineární rovnice dostáváme, že $k = 4$.

- (c) Nechť $k = 2$. Náhodně vybereme jednu urnu, kterou vynecháme, ze zbylých náhodně vytáhneme po jednom míčku. Jaká je pravděpodobnost, že všechny vytážené míčky jsou bílé?

Nechť V_i je událost, že byla vyřazena i -tá urna. Potom nechť W_i je událost, že byl vytážen bílý míček z i -té urny. Jevy W_i jsou navzájem nezávislé a zároveň jsou nezávislé jevy W_j a V_i pro $i \neq j$. Označme hledanou pravděpodobnost P , můžeme psát

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^6 P(V_i) \left(\prod_{j \neq i} P(W_j) \right) = \frac{1}{6} \underbrace{\left(\left(\frac{5}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^3 \right)}_{\frac{8}{375}} + \\ &\underbrace{\frac{2}{6} \left(\frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^3 \right)}_{\frac{32}{1875}} + \underbrace{\frac{3}{6} \left(\frac{2}{10} \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^2 \right)}_{\frac{2}{125}} = \frac{34}{625}. \end{aligned}$$

Příklad A.2. Náhodná veličina Y má spojité rozdělení s hustotou

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3y}, & y \geq 0; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definujeme $U := \lceil Y \rceil$ a $V := \lceil Y \rceil - Y$ (tedy horní celou a frakcionální část Y).

- (a) Určete rozdělení náhodné veličiny U .

Zřejmě půjde o diskrétní rozdělení, kde pro $u \geq 1$ budeme mít

$$P[U = u] = P[u-1 < Y < u] = \int_{u-1}^u 3e^{-3y} dy = e^{-3u}(e^3 - 1).$$

- (b) Určete rozdělení náhodné veličiny V .

Tentokrát půjde o spojité rozdělení, spočteme jeho distribuční funkci. Pro $v \in (0, 1)$ máme

$$F_V(v) = P[V < v] = \sum_{t=1}^{\infty} \int_{t-v}^t 3e^{-3y} dy = \sum_{t=1}^{\infty} e^{-3t}(e^{3v} - 1) = \frac{e^{3v} - 1}{e^3 - 1}.$$

Pro $v \leq 0$ je F_V nulová, pro $v \geq 1$ máme $F_V(v) = 1$.

- (c) Spočítejte $\mathbb{E}(Ye^{-Y} - 1)$.

Využijeme pravidlo líného statistika (Věta 3.5) s transformací $t(y) = ye^{-y}$, dostaneme

$$\mathbb{E}(Ye^{-Y}) = \int_0^{\infty} (ye^{-y} \cdot 3e^{-3y}) = \int_0^{\infty} 3ye^{-4y} = \frac{3}{16}.$$

S využitím linearity střední hodnoty dostaneme $\mathbb{E}(Ye^{-Y} - 1) = \mathbb{E}(Ye^{-Y}) - 1 = -\frac{13}{16}$.

Příklad A.3. Náhodný vektor $(X, Y)^T$ má spojité rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} ay, & -1 < x < -1, 0 < y \leq x^2; \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta.

- (a) Určete $a \in \mathbb{R}$.

Platí, že integrál hustoty přes celý prostor je roven 1. Můžeme tedy psát

$$1 = \int_{-1}^1 \int_0^{x^2} ay dy dx = \frac{a}{5}.$$

Tedy $a = 5$.

- (b) Určete marginální rozdělení a střední hodnotu náhodné veličiny X .
Platí pro $|x| < 1$ (jinde je hustota nulová)

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \int_0^{x^2} 5y dy = \frac{5x^4}{2},$$

dále spočteme

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-1}^1 x f_X(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{5x^5}{2} = 0.$$

- (c) Určete $P(0 < X < \sqrt{2Y})$.

Nalezneme průsečík grafů funkcí $y = x^2$ a $x = \sqrt{2y}$. Máme $y = x^2 = \frac{1}{2}x^2$, tedy grafy těchto funkcí se protnou pouze počátku a jinde je hodnota druhé funkce ostře menší než hodnota první. Požadovaná podmínka je splněna pro hodnoty $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, které se nachází mezi těmito dvěma parabolami. Můžeme tedy integrovat

$$P(0 < X < \sqrt{2Y}) = \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}x^2}^{x^2} 5y dy dx = \frac{3}{8}.$$

- (d) Spočtěte kovarianci veličin X a Z , kde $Z = XY$. Dle známého vzorce máme $\text{Cov}(X, XY) = \mathbb{E}(X \cdot XY) - \mathbb{E}X \mathbb{E}XY = \mathbb{E}[X^2Y] - \mathbb{E}X \mathbb{E}XY$. Opět s využitím pravidla lineárního statistika můžeme integrovat

$$\text{Cov}(X, XY) = \int_{-1}^1 \int_0^{x^2} x^2 y \cdot 5y dy dx - 0 = \frac{10}{27}.$$

- (e) Rozhodněte, zda jsou veličiny X a Y nezávislé a své rozhodnutí zdůvodněte.
Náhodné veličiny X a Y nejsou nezávislé, neboť

$$0 = P[0 < x < \frac{1}{2}, y > \frac{1}{4}] \neq P[0 < x < \frac{1}{2}]P[y > \frac{1}{4}],$$

jelikož zjevně ani jeden z činitelů na pravé straně není nulový.

B Ukázková zápočtová písemka – Varianta B

Příklad B.1. Máme šest truhel a v každé z nich je jedna stříbrná mince. Do jedné truhly vložíme tři zlaté mince, do dvou truhel dvě zlaté mince a do zbylých tří truhel po jedné zlaté minci (dohromady jsme tak dodali deset zlatých mincí).

- (a) Z náhodně vybrané truhly dvakrát táhneme s vracením. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme jednu zlatou a jednu stříbrnou minci.
Nechť H je událost, že jsme vytáhli jednu zlatou a jednu stříbrnou minci z dané truhly a V_i jsou události, že jsme náhodně vybrali i -tou truhlu. Potom $P(H) = 2^{\frac{p-1}{p}} \cdot \frac{1}{p}$ (p je počet mincí v dané truhle, chceme jednu zlatou

a jednu stříbrnou a nezáleží na pořadí) a $P(V_i) = \frac{1}{6}$. Potom ze zákona úplné pravděpodobnosti dostáváme

$$P(H) = \sum_{i=1}^6 P(V_i)P(H|V_i) = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{6} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{6} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{16} + \frac{4}{27} + \frac{1}{4} = \frac{199}{432}.$$

- (b) Z náhodně vybrané truhly jsme dvakrát táhli s vracením a vytáhli jednu zlato a jednu stříbrnou minci (bez ohledu na pořadí). S jakou pravděpodobností to byla truhla s alespoň dvěma zlatými mincemi?

Z Bayesovy věty (Věta 1.15) máme (použijeme stejnou notaci jako v předchozím příkladu) $P(V_i|H) = P(H|V_i) \frac{P(V_i)}{P(H)}$. Chceme spočítat

$$\sum_{i=1}^3 P(V_i|H) = \sum_{i=1}^3 P(H|V_i) \frac{P(V_i)}{P(H)} = \frac{1}{P(H)} (P(H|V_1)P(V_1) +$$

$$2P(H|V_2)P(V_2)) = \frac{432}{199} \left(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{91}{199}.$$

- (c) Náhodně vybereme tři truhly a z každé náhodně vytáhneme po jedné minci. S jakou pravděpodobností bude alespoň jedna z nich zlatá?

Spočteme nejdříve pravděpodobnost opačného jevu, tedy události, že budou vytaženy tři stříbrné mince. Označme $V_{(i,j,k)}$ pravděpodobnost, že bylo náhodně zvoleno i truhel se třemi zlatými mincemi, j truhel se dvěma a k truhel s jednou zlatou mincí. Pravděpodobnost tohoto jevu se spočte pomocí vzorce

$$P(V_{(i,j,k)}) = \frac{\binom{1}{i} \binom{2}{j} \binom{3}{k}}{\binom{6}{3}} = \frac{\binom{2}{j} \binom{3}{k}}{20}.$$

Dále označme S jev, že byly vytaženy 3 stříbrné mince. Potom

$$P(S) = \sum_{i,j,k} P(V_{(i,j,k)}) \frac{1}{4^i} \cdot \frac{1}{3^j} \cdot \frac{1}{2^k}.$$

Možné hodnoty i, j, k a příslušné pravděpodobnosti $P(V_{(i,j,k)})$ zapíšeme do tabulky.

i	j	k	$P(V_{(i,j,k)})$	sčítanec v $P(S)$
1	2	0	1/20	1/720
1	1	1	6/20	1/80
1	0	2	3/20	3/320
0	0	3	1/20	1/160
0	2	1	3/20	1/120
0	1	2	6/20	1/40

Potom $P(S) = \frac{181}{2880}$ a tedy hledaná pravděpodobnost vytažení alespoň jedné zlaté mince je $P(S^C) = 1 - P(S) = \frac{2699}{2880}$.

Příklad B.2. Náhodná veličina X má spojité rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definujme $U := \lfloor X \rfloor$ a $V := X - \lfloor X \rfloor$ (jinými slovy spodní celá část a frakcionální část X).

(a) Určete rozdělení náhodné veličiny U .

Jedná se o diskrétní náhodnou veličinu s pravděpodobnostní funkcí

$$P[U = u] = \int_u^{u+1} f(x) dx = [-e^{-2x}]_u^{u+1} = e^{-2u}(1 - e^{-2})$$

pro $u \geq 0$.

(b) Určete rozdělení náhodné veličiny V .

Tentokrát máme spojitou náhodnou veličinu, spočteme její distribuční funkci. Nechť $v \in (0, 1)$, potom

$$\begin{aligned} F_V(v) = P[V \leq v] &= \sum_{u=0}^{\infty} \int_0^v f(u+t) dt = \sum_{u=0}^{\infty} \int_0^v 2e^{-2u} e^{-2t} dt = \\ &= \sum_{u=0}^{\infty} e^{-2u}(1 - e^{-2v}) = \frac{1 - e^{-2v}}{1 - e^{-2}}. \end{aligned}$$

Pro $v \leq 0$ máme $F_V(v) = 0$, pro $v \geq 1$ máme $F_V(v) = 1$.

(c) Spočtete $\mathbb{E}(Xe^{-X} - 1)$.

S využitím pravidla líného statistika (Věta 3.5) dostáváme (transformace $t(x) = xe^{-x} - 1$)

$$\mathbb{E}t(X) = \int_0^{\infty} t(x)f(x)dx = \int_0^{\infty} (xe^{-x} - 1)2e^{-2x}dx = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}.$$

Příklad B.3. Náhodný vektor $(X, Y)^T$ má spojité rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, -x^2 < y < x^2; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete $P(0 < 2Y < X^2)$.

Počítáme obsah útvaru mezi osou x a křivkou $y = \frac{1}{2}x^2$ s hustotou $f(x, y)$. Máme integrál

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}x^2} 2xdydx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

- (b) Určete marginální rozdělení a střední hodnotu veličiny X .
Hustotu f_X získáme zintegrováním hustoty $f(x, y)$ přes všechny možné hodnoty y , tedy

$$f_X(x) = \int_{-x^2}^{x^2} 2x dy = 4x^3.$$

Dále platí

$$\mathbb{E}X = \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 4x^4 dx = \frac{4}{5}.$$

- (c) Spočítejte kovarianci veličin X a W , kde $W = X^2Y$.
Platí, že $\text{Cov}(X, X^2Y) = E[X^3Y] - E[X]E[X^2Y]$, tedy potřebujeme dopočítat chybějící střední hodnoty

$$E[X^3Y] = \int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} x^3 y \cdot 2x dy dx = 0;$$

$$E[X^2Y] = \int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} x^2 y \cdot 2x dy dx = 0,$$

(v obou případech je integrand lichý v proměnné y , a tedy integrál přes interval $[-a, a]$ je roven nule). Vychází $\text{Cov}(X, X^2Y) = 0 - 0 = 0$.

- (d) Rozhodněte, zda jsou veličiny X a Y nezávislé a své rozhodnutí zdůvodněte.
Veličiny X a Y nejsou nezávislé, neboť $P[0 < X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{4}] = 0 \neq P[0 < X < \frac{1}{2}]P[Y > \frac{1}{4}]$ (součin zřejmě nenulových hodnot).