

# Pravděpodobnost a matematická statistika (NMSA202)

Petr Velička \*

přednášející: doc. RNDr. Michal Pešta, Ph.D. †

LS 2024/25

---

\*petrvel@matfyz.cz

†pesta@karlin.mff.cuni.cz

# 1 Náhodné jevy

Začneme nejdříve základními definicemi, bez nichž vůbec nemůžeme mluvit o pravděpodobnosti.

**Definice 1.1.** *Výběrovým prostorem* rozumíme množinu  $\Omega$  všech možných výsledků nějakého experimentu. Prvky  $\omega \in \Omega$  této množiny nazýváme *elementárními jevy*. Podmnožině  $A \subset \Omega$  říkáme (*náhodný*) *jev*.

Pro ilustraci uvedeme následující motivační příklad, kde podrobně popíšeme souvislosti s právě zdefinovanými pojmy.

**Příklad 1.2.** Házíme dvakrát férovou mincí. Naším výběrovým prostorem bude množina  $\Omega = \{PP, PO, OP, OO\}$ . Událost, že první hod je panna, je tedy  $A = \{PP, PO\}$ . V tomto zápise písmeno  $P$  odpovídá tomu, že padla panna, kdežto písmeno  $O$  odpovídá orlu.

Dále uvažujme jevy  $H_1$  – při prvním hodu padne panna, a  $H_2$  – při druhém hodu padne panna. Necht jsou všechny výsledky stejně pravděpodobné (jinými slovy, mince je férová), potom pravděpodobnost, že padne alespoň jedna panna (tj. nastane jev  $H_1 \cup H_2$ ) je  $\frac{3}{4}$ .

*Důkaz.* Zřejmě z předchozího máme  $H_1 = \{PP, PO\}$  a  $H_2 = \{OP, PP\}$ . Pravděpodobnost spočteme jako podíl velikosti  $|H_1 \cup H_2| = 3$  a velikosti celého prostoru  $|\Omega| = 4$ .  $\square$

Tato jednoduchá intuice však selže v případě nekonečné (nespočetné) množiny  $\Omega$ , neboť jak již čtenář jistě ví z přednášky základů teorie míry, na nespočetné množině neexistuje “rozumný” způsob, jak měřit množiny. Musíme proto pracovat pouze s jistou třídou podmnožin  $\Omega$ , které budeme říkat  $\sigma$ -algebra.

**Definice 1.3.** Necht  $\Omega \neq \emptyset$  je množina a  $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$  soubor jejích podmnožin. Této množině  $\mathcal{A}$  říkáme  $\sigma$ -algebra, jestliže jsou splněny následující podmínky:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- (ii) Pokud  $A \in \mathcal{A}$ , pak  $A^C := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ ,
- (iii) Pokud  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ , pak  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

Dvojici  $(\Omega, \mathcal{A})$  nazýváme *měřitelný prostor*.

Každé události  $A \in \mathcal{A}$  přiřadíme číslo  $\mathbb{P}(A)$ , které nazýváme *pravděpodobnost* jevu  $A$ . Jelikož chceme, aby se zachovala intuice z předchozího příkladu, musíme tuto představu náležitým způsobem formalizovat.

**Definice 1.4.** Necht  $(\Omega, \mathcal{A})$  je měřitelný prostor. Zobrazení  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  nazýváme *pravděpodobnostní mírou* (*pravděpodobností*), jestliže:

- (i)  $P(\Omega) = 1$ ,
- (ii) Pro libovolné po dvou disjunktní měřitelné množiny  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  platí  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ .

Trojici  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  nazýváme *pravděpodobnostní prostor*.

Přímo z této definice již můžeme odvodit pár základních vlastností pravděpodobnosti, se kterými dále budeme pracovat. Ve všech následujících tvrzeních pracujeme s pravděpodobnostním prostorem  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

**Pozorování 1.5. (Základní vlastnosti pravděpodobnostní míry)** Pro výše jmenovaný pravděpodobnostní prostor platí následující tvrzení:

1.  $P(\emptyset) = 0$ ,
2. Pro  $A, B \in \mathcal{A}$  disjunktní platí  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
3. Pro  $A \in \mathcal{A}$  platí  $P(A^C) = 1 - P(A)$ ,
4. Pro  $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$  platí  $P(A) \leq P(B)$ .

*Důkaz.* 1. Uvažujme posloupnost  $A_1 = \Omega, A_2 = A_3 = \dots = \emptyset$ . Potom z vlastnosti (ii) z definice máme, že  $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \dots) = P(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset)$ . Tedy  $\sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$ , což může nastat pouze v případě  $P(\emptyset) = 0$  (jde o součet nekonečně mnoha nezáporných čísel).

2. Necht  $A_1 = A, A_2 = B, A_i = \emptyset$  pro  $i > 2$ . Tvrzení plyne přímo z vlastnosti (ii) z definice pravděpodobnostní míry a již dokázané vlastnosti 1.
3.  $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$ . Tato rovnost platí, neboť množina je vždy disjunktní se svým komplementem.
4.  $P(B) = P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$ . Jelikož funkce  $P$  je nezáporná, snadno vidíme, že  $P(B) \geq P(A)$ .

□

**Lemma 1.6. (Pravděpodobnost sjednocení)** Pro libovolné  $A, B \in \mathcal{A}$  platí  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

*Důkaz.* Rozepíšeme  $A \cup B = (A \cap B^C) \cup (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$ . Tyto tři množiny jsou zřejmě po dvou disjunktní. Dále díky aditivitě pravděpodobnosti máme  $P(A \cup B) = P(A \cap B^C) + P(A \cap B) + P(A^C \cap B) + P(A \cap B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ . □

**Věta 1.7. (Spojitost pravděpodobnosti)** Buď  $A_n \uparrow A$  nebo  $A_n \downarrow A$  pro  $A_n, A \in \mathcal{A}$ . Potom platí  $P(A_n) \rightarrow P(A)$ .

*Důkaz.* Necht  $A_n \uparrow A$ . Potom z definice  $A_1 \subset A_2 \dots$  a platí  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Definujme posloupnost  $B_n$ :  $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ . Potom  $B_i$  jsou po dvou disjunktní a platí  $A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$ . Zřejmě také platí  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ . Pak  $P(A_n) = P(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i)$ . Z toho již můžeme odvodit  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = P(A)$ .

Případ klesající  $A_n$  se dokáže analogicky, stačí uvažovat  $C_n = A_n^C$ . □

konec 1. přednášky (17.2.2025)