# Pravděpodobnost a matematická statistika (NMSA202)

Petr Velička *
přednášející: doc. RNDr. Michal Pešta, Ph.D. †

LS 2024/25

*petrvel@matfyz.cz
†pesta@karlin.mff.cuni.cz

# 1 Náhodné jevy

Začneme nejdříve základními definicemi, bez nichž vůbec nemůžeme mluvit o pravděpodobnosti.

**Definice 1.1.** *Výběrovým prostorem* rozumíme množinu $\Omega$ všech možných výsledků nějakého experimentu. Prvky $\omega \in \Omega$ této množiny nazýváme *elementárními jevy.* Podmnožině $A \subset \Omega$ říkáme *(náhodný) jev.*

Pro ilustraci uvedeme následující motivační příklad, kde podrobně popíšeme souvislosti s právě zadefinovanými pojmy.

**Příklad 1.2.** Házíme dvakrát férovou mincí. Naším výběrovým prostorem bude množina $\Omega = \{PP, PO, OP, OO\}$. Událost, že první hod je panna, je tedy $A = \{PP, PO\}$. V tomto zápise písmeno $P$ odpovídá tomu, že padla panna, kdežto písmeno $O$ odpovídá orlu.

Dále uvažujme jevy $H_1$ – při prvním hodu padne panna, a $H_2$ – při druhém hodu padne panna. Nechť jsou všechny výsledky stejně pravděpodobné (jinými slovy, mince je férová), potom pravděpodobnost, že padne alespoň jedna panna (tj. nastane jev $H_1 \cup H_2$) je $\frac{3}{4}$.

*Důkaz.* Zřejmě z předchozího máme $H_1 = \{PP, PO\}$ a $H_2 = \{OP, PP\}$. Pravděpodobnost spočteme jako podíl velikosti $|H_1 \cup H_2| = 3$ a velikosti celého prostoru $|\Omega| = 4$. $\square$

Tato jednoduchá intuice však selže v případě nekonečné (nespočetné) množiny $\Omega$, neboť jak již čtenář jistě ví z přednášky základů teorie míry, na nespočetné množině neexistuje "rozumný" způsob, jak měřit množiny. Musíme proto pracovat pouze s jistou třídou podmnožin $\Omega$, které budeme říkat $\sigma$-algebra.

**Definice 1.3.** Nechť $\Omega \neq \emptyset$ je množina a $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ soubor jejích podmnožin. Této množině $\mathcal{A}$ říkáme $\sigma$-algebra, jestliže jsou splněny následující podmínky:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) Pokud $A \in \mathcal{A}$, pak $A^C := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) Pokud $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, pak $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$.

Dvojici $(\Omega, \mathcal{A})$ nazýváme *měřitelný prostor.*

Každé události $A \in \mathcal{A}$ přiřadíme číslo $\mathbb{P}(A)$, které nazýváme *pravděpodobnost* jevu $A$. Jelikož chceme, aby se zachovala intuice z předchozího příkladu, musíme tuto představu náležitým způsobem formalizovat.

**Definice 1.4.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Zobrazení $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ nazýváme *pravděpodobnostní mírou (pravděpodobností)*, jestliže:

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) Pro libovolné po dvou disjunktní měřitelné množiny $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ platí $P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$.

Trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nazýváme *pravděpodobnostní prostor.*

Přímo z této definice již můžeme odvodit pár základních vlastností pravděpodobnosti, se kterými dále budeme pracovat. Ve všech následujících tvrzeních pracujeme s pravděpodobnostním prostorem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

**Pozorování 1.5.** ***(Základní vlastnosti pravděpodobnostní míry)*** *Pro výše jmenovaný pravděpodobnostní prostor platí následující tvrzení:*

1. $P(\emptyset) = 0$,
2. *Pro* $A, B \in \mathcal{A}$ *disjunktní platí* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. *Pro* $A \in \mathcal{A}$ *platí* $P(A^C) = 1 - P(A)$,
4. *Pro* $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$ *platí* $P(A) \leq P(B)$.

*Důkaz.*
1. Uvažujme posloupnost $A_1 = \Omega, A_2 = A_3 = \cdots = \emptyset$. Potom z vlastnosti (ii) z definice máme, že $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \dots) = P(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset)$. Tedy $\sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$, což může nastat pouze v případě $P(\emptyset) = 0$ (jde o součet nekonečně mnoha nezáporných čísel).
2. Nechť $A_1 = A, A_2 = B, A_i = \emptyset$ pro $i > 2$. Tvrzení plyne přímo z vlastnosti (ii) z definice pravděpodobnostní míry a již dokázané vlastnosti 1.
3. $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$. Tato rovnost platí, neboť množina je vždy disjunktní se svým komplementem.
4. $P(B) = P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$. Jelikož funkce $P$ je nezáporná, snadno vidíme, že $P(B) \geq P(A)$.

$\square$

**Lemma 1.6.** ***(Pravděpodobnost sjednocení)*** *Pro libovolné* $A, B \in \mathcal{A}$ *platí* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

*Důkaz.* Rozepíšeme $A \cup B = (A \cap B^C) \cup (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$. Tyto tři množiny jsou zřejmě po dvou disjunktní. Dále díky aditivitě pravděpodobnosti máme $P(A \cup B) = P(A \cap B^C) + P(A \cap B) + P(A^C \cap B) + P(A \cap B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. $\square$

**Věta 1.7.** ***(Spojitost pravděpodobnosti)*** *Buď* $A_n \uparrow A$ *nebo* $A_n \downarrow A$ *pro* $A_n, A \in \mathcal{A}$. *Potom platí* $P(A_n) \to P(A)$.

*Důkaz.* Nechť $A_n \uparrow A$. Potom z definice $A_1 \subset A_2 \dots$ a platí $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Definujme posloupnost $B_n$: $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Potom $B_i$ jsou po dvou disjunktní a platí $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Zřejmě také platí $A \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Pak $P(A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$. Z toho již můžeme odvodit $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = P(A)$.

Případ klesající $A_n$ se dokáže analogicky, stačí uvažovat $C_n = A_n^C$. $\square$

*konec 1. přednášky (17.2.2025)*

Uvedeme si ještě jeden příklad ilustrující intuitivní chápání pravděpodobnosti a zavedeme první takzvané pravděpodobnostní rozdělení. Uvažujme případ, že prostor $\Omega$ je konečný. Nechť všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné, pak platí

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

V tomto případě mluvíme o *rovnoměrném rozdělení pravděpodobnosti*.

**Příklad 1.8.** *(Hod dvěma kostkami)* Výběrový prostor $\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1 \dots 6\}\}$ má 36 prvků. Jestliže všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné, pak platí $P(A) = \frac{|A|}{36}$. Například, pravděpodobnost toho, že součet na kostkách je přesně 11, je $2/36$, protože pouze dva výsledky $(5,6)$ a $(6,5)$ odpovídají této události.

V praxi často chceme odlišit, zda pravděpodobnost výskytu jedné události nějakým způsobem závisí na výskytu jiné události. K tomu nám poslouží pojem nezávislosti jevů.

**Definice 1.9.** Dvě události $A, B \in \mathcal{A}$ jsou *nezávislé*, jestliže platí $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Obdobně, množina událostí $\{A_i : i \in I\}$ (kde indexová množina $I$ je nejvýše spočetná) je nezávislá, jestliže platí

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

pro každou konečnou podmnožinu $J \subset I$.

Je důležité si uvědomit, že disjunktní události s kladnou pravděpodobností nejsou nezávislé (neboť součin jejich pravděpodobností není roven 0 – pravděpodobnost výskytu jejich prázdného průniku). Obecně se pracuje se dvěma typy nezávislosti – předpokládanou (plyne z podstaty zkoumané úlohy) a odvozenou (dokázaná pomocí jiných vlastností úlohy). Následující příklad ilustruje praktické použití právě zavedeného pojmu.

**Příklad 1.10.** Házíme férovou mincí 10krát. Nechť $A$ je událost "padla aspoň jedna panna". Pak platí $P(A) = 1 - (1/2)^{10}$.

***Důkaz.*** Nechť $T_j$ je událost, že při $j$-tém hodu padne orel. Můžeme psát $P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - P(\text{samé orly}) = 1 - P(T_1 \cap \dots \cap T_{10})$. Dále díky nezávislosti (v tomto případě jde o nezávislost předpokládanou) jevů $T_j$ máme $1 - P(T_1 \cap \dots \cap T_{10}) = 1 - P(T_1) \cdots P(T_{10}) = 1 - (1/2)^{10} \approx 0.999$. $\square$

Dalším silným nástrojem v teorii pravděpodobnosti je podmíněná pravděpodobnost, která nám poskytuje odpověď na otázku "Pokud vím, že nastala událost $B$, jaká je pravděpodobnost události $A$?".

**Definice 1.11.** Mějme jevy $A, B \in \mathcal{A}$. Pokud $P(B) > 0$, pak *podmíněná pravděpodobnost* $A$ za podmínky $B$ je definována vztahem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Poznamenejme si několik základních vlastností podmíněné pravděpodobnosti, jejichž důkaz snadno plyne z příslušných definic.

**Pozorování 1.12.** ***(Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti)***

*(i)* *Pro pevné* $B \in \mathcal{A}, P(B) > 0$ *je* $P(\cdot|B)$ *pravděpodobnostní míra.*

*(ii)* *Obecně platí* $P(A|B) \neq P(B|A)$*, platí totiž* $P(A|B) = P(B|A)\frac{P(A)}{P(B)}$ *(pokud obě strany rovnosti dávají smysl).*

*(iii)* *Události* $A$ *a* $B$ *jsou nezávislé právě tehdy, když* $P(A|B) = P(A)$ *(předpokládáme nenulovost* $P(B)$*).*

*(iv)* $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$ *v případě, že* $P(A)P(B) > 0$.

*Důkaz.* Vlastnosti (iii) a (iv) plynou přímo z definice vynásobením vhodnou konstantou.

Vlastnost (ii) se dokáže následujícím protipříkladem, uvažujme hod dvěma férovými mincemi. Nechť $H_1$ je událost “padla aspoň jedna panna” a $H_2$ událost “padly dvě panny”. Potom $P(H_1|H_2) = 1$ ale $P(H_2|H_1) = \frac{1}{3}$. Důkaz obecného vztahu je ponechán čtenáři jako snadné (ale užitečné) cvičení.

Nakonec, vlastnost (i) je důsledkem toho, že pro libovolnou množinu $A \in \mathcal{A}$ je $A \cap B$ měřitelná, a navíc pro libovolný systém po dvou disjunktních množin $A_i, i \in \mathbb{N}$ platí $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \frac{1}{P(B)} P\left((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B\right) =$
$\frac{1}{P(B)} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B)\right) = \frac{1}{P(B)} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$. □

Použití podmíněné pravděpodobnosti v praxi však někdy může vést k neintuitivním výsledkům, které ilustruje následující příklad.

**Příklad 1.13.** Uvažujme nemoc $D$ a test, který má dva možné výsledky. Pravděpodobnosti výsledků tohoto testu jsou uvedeny v následující tabulce. Zde sloupce odpovídají přítomnosti/absenci nemoci a řádky výsledkům testu.

| | $D$ | $D^C$ |
|---|---|---|
| $+$ | 0.009 | 0.099 |
| $-$ | 0.001 | 0.891 |

Z definice spočteme následující podmíněné pravděpodobnosti:

$$P(+|D) = \frac{P(+ \cap D)}{P(D)} = \frac{0.009}{0.009 + 0.001} = 0.9.$$

$$P(-|D^C) = \frac{P(- \cap D^C)}{P(D^C)} = \frac{0.891}{0.891 + 0.099} \approx 0.9.$$

Vychází nám, že test je docela přesný, neboť nemocní lidé mají test v 90% případů pozitivní, stejně tak zdraví lidé jsou v 90% případů negativní.

Dále předpokládejme, že pacient šel na test a získal pozitivní výsledek. Spočteme, s jakou pravděpodobností je opravdu nakažený.

$$P(D|+) = \frac{P(D \cap +)}{P(+)} = \frac{0.009}{0.009 + 0.099} \approx 0.08.$$

Vyšlo nám, že na první pohled zdánlivě precizní test ve skutečnosti má méně než 10% úspěšnost. Jedním z důvodů této diskrepance může být například velký nepoměr zdravých lidí vůči nakaženým (pouze jedno procento) ve zdrojových datech, což je jev který se obecně vyskytuje u většiny nemocí. V praxi se proto často pracuje s domněnkami – například testujeme jen pacienty, kteří vykazují nějaké symptomy apod.

Na závěr uvedeme dvě velmi užitečné věty, které se často používají v nejrůznějších úlohách a týkají se podmíněné pravděpodobnosti. Zformulujeme je pro spočetné rozklady, ale obdobná tvrzení platí i pro konečné rozklady s velmi podobným důkazem.

**Věta 1.14.** ***(Zákon úplné pravděpodobnosti)*** *Nechť $A_1, A_2, \dots$ je spočetný disjunktní rozklad $\Omega$ takový, že $P(A_i) > 0$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Potom pro libovolnou událost $B \in \mathcal{A}$ platí:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i).$$

*Důkaz.* Definujme posloupnost množin $C_i = B \cap A_i$ pro $i \in \mathbb{N}$. Zjevně $\{C_i, i \in \mathbb{N}\}$ je disjunktní pokrytí $B$. Potom $P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)$. □

**Věta 1.15.** ***(Bayes)*** *Nechť $A_1, A_2, \dots$ je spočetný disjunktní rozklad $\Omega$ takový, že $P(A_i) > 0$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Mějme událost $B \in \mathcal{A}$ s nenulovou pravděpodobností. Potom platí:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

*Důkaz.* Přímým výpočtem dostáváme

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)},$$

kde poslední rovnost získáme aplikací *Věty 1.14*. □

Použití Bayesovy věty si ukážeme na následujícím příkladu.

**Příklad 1.16.** Uvažujme e-mailovou schránku. Máme tři kategorie e-mailů: $A_1$ – spam, $A_2$ – nízká priorita, $A_3$ – vysoká priorita. Na základě předchozích zkušeností víme, že $P(A_1) = 0.7$, $P(A_2) = 0.2$, $P(A_3) = 0.1$. Nechť $B$ je událost, že daný e-mail obsahuje slovo “zdarma”. Platí $P(B|A_1) = 0.9, P(B|A_2) =$

$0.01, P(B|A_3) = 0.01$[1]. Jaká je pravděpodobnost, že příchozí e-mail obsahující slovo "zdarma" je spam?

Přímým výpočtem z Bayesovy věty získáme

$$P(A_1|B) = \frac{0.9 \cdot 0.7}{0.9 \cdot 0.7 + 0.01 \cdot 0.2 + 0.01 \cdot 0.1} = 0.995.$$

Tedy pravděpodobnost, že tento e-mail je spam je přes 99%!

**Věta 1.17.** ***(O postupném podmiňování)*** *Nechť $\{A_i\}_{i=1}^n$ jsou náhodné jevy takové, že $P(\bigcap_{i=1}^n) > 0$. Pak platí*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1}) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1).$$

*Důkaz.* Dokazujeme indukcí podle počtu náhodných jevů. Z definice podmíněné pravděpodobnosti víme, že $P(A_2 \cap A_1) = P(A_2|A_1)P(A_1)$. Dále

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\right) = P\left(A_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) = P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1}\right) P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}\right),$$

čímž je důkaz ukončen. □

[1] Tyto hodnoty se nutně nemusí sečíst na 1

## 2 Náhodné veličiny

V této kapitole se budeme věnovat náhodným veličinám, což bude formalizovat (a zobecňovat) jakýsi intuitivní chápání toho, že nějaká proměnná nabývá různých hodnot s určitými pravděpodobnostmi. Začneme ústřední definicí celé statistiky – náhodnou veličinou.

**Definice 2.1.** Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. *Náhodná veličina* je měřitelné zobrazení, které přiřazuje každému výsledku $\omega$ reálné číslo $X(\omega)$. Jinými slovy, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \forall x \in \mathbb{R}$.

*konec 2. přednášky (18.2.2025)*

**Úmluva 2.2.** Zavedeme značení $[X \in B] = \{\omega : X(\omega) \in B\}, [X \leq a] = \{\omega, X(\omega) \leq a\}$. Platí tedy $[X \in B], [X \leq a] \in \mathcal{A}$ pro všechna $B \in \mathcal{B}, a \in \mathbb{R}$. Jde o náhodné jevy a jsou tedy dobře definované jejich pravděpodobnosti $P[X \in B], P[X \leq a]$.

**Příklad 2.3.** Házíme mincí desetkrát. Nechť $X(\omega)$ je počet orlů v posloupnosti $\omega$. Jestliže $\omega = OOPOOPOOPP$ (kde $O$ je orel a $P$ je panna), platí $X(\omega) = 6$.

V předchozí kapitole jsme mluvili o pravděpodobnostním rozdělení, je na čase tento pojem formálně zadefinovat.

**Definice 2.4.** *Rozdělením náhodné veličiny* $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nazýváme indukovanou pravděpodobnostní míru $P_X$ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definovanou jako

$$P_X(B) := P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Máme tedy jakýsi obraz míry $P$ v zobrazení $P_X$ čímž se $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ zobrazí na pravděpodobnostní prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$. V opačném směru můžeme použít takzvané kanonické vnoření do prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$, kde naší zvolenou měřitelnou funkcí bude identita, tedy není potřeba se bát, že by příslušný prostor nemusel existovat. Následující věta říká, že nezáleží ve kterém z těchto dvou prostorů integrujeme libovolnou funkci.

**Věta 2.5.** ***(O přenosu integrace)*** *Buď $g$ měřitelná funkce na měřitelném prostoru $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ a $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{M}, \mathcal{M})$. Nechť $P_X$ je míra na $\mathcal{M}$ indukovaná zobrazením $X$, tedy $P_X(M) = P[X^{-1}(M)]$ pro $M \in \mathcal{M}$. Potom, je-li aspoň jedna strana definována, platí*

$$\int_\Omega g[X(\omega)] dP(\omega) = \int_{\mathbb{M}} g(x) dP_X(x).$$

*Důkaz.* Důkaz této věty je poměrně technický, hlavní ideou je "klasický" postup z teorie míry postupným důkazem nejdříve pro charakteristickou funkci, poté pro jednoduchou měřitelnou (nabývající jen konečně mnoha hodnot), pak pro nezápornou měřitelnou a na závěr pro obecnou měřitelnou funkci.

Nechť $g = \chi_B, B \in \mathcal{M}$. Tedy $g(X(\omega)) = 1$ pro $X(\omega) \in B$ (a všude jinde nulová), tedy pro $\omega \in X^{-1}(B)$. Potom máme

$$\int_\Omega g(X(\omega)dP(\omega) = \int_{X^{-1}(B)} dP(\omega) = P[X^{-1}(B)].$$

Pro pravou stranu máme

$$\int_\mathbb{M} g(x)dP_X(x) = \int_B dP_X(x) = P_X(B) = P[X^{-1}(B)].$$

Dále nechť $g$ je jednoduchá měřitelná, tedy $g(\cdot) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{B_k}(\cdot)$ pro $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{R}$ a $B_k \in \mathcal{M}$ pro všechna $k$. Z linearity integrálu plyne (vytkneme sumu) $\int_\Omega g(X(\omega)dP(\omega) = \int_{X^{-1}(B)} dP(\omega) = P[X^{-1}(B)]$.

Je-li $g$ nezáporná měřitelná, potom existuje posloupnost $g_n$ jednoduchých měřitelných funkcí takových, že $g_n \nearrow g$. Potom dle Léviho věty o monotonní konvergenci máme

$$\int_\Omega g[X(\omega)]dP(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n[X(\omega)]dP(\omega)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{M} g_n(x)dP_X(x) = \int_\mathbb{M} g(x)dP_X(x),$$

kde třetí rovnost plyne z již dokázané části pro jednoduché měřitelné funkce.

Nakonec, pro $g$ měřitelnou existuje rozklad $g = g^+ - g^-$ takový, že $g^+, g^-$ jsou nezáporné měřitelné, tedy požadované tvrzení plyne z části pro nezáporné měřitelné funkce. □

Na závěr poznamenejme, že se nám budou obzvlášť hodit volby $(\mathbb{M}, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ pro $n \geq 1$.

Připomeňme si, že jsou-li $\mu, \nu$ dvě $\sigma$-konečné míry na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ a je-li $\nu << \mu$ (tedy $\mu(B) = 0$ implikuje $\nu(B) = 0$), potom z Radonovy-Nikodymovy věty plyne existence nezáporné měřitelné funkce $f$ takové, že $\nu(B) = \int_\mathbb{R} f d\mu$ pro všechna $B \in \mathcal{B}$. Této funkci $f$ říkáme Radonova-Nikodymova derivace a píšeme $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. Taková funkce $f$ je navíc určena jednoznačně až na množinu $\mu$-míry 0.

Využijeme těchto poznatků tak, že zvolíme vhodnou referenční míru na $\mathbb{R}$ a rozdělení $P_X$ pak bude popsáno právě zavedenou Radonovou-Nikodymovou derivací. Vhodné referenční míry jsou např.

- Lebesgueova míra $\lambda$,
- Čítací míra na spočetné podmnožině $\mathbb{R}$, platí $\mu_S(B) = |B \cap S|$ kde $S$ je nejvýše spočetná podmnožina $\mathbb{R}$.

**Definice 2.6.** Buď $X$ náhodná veličina a $P_X$ její rozdělení. Nechť $P_X$ je absolutně spojité vůči $\mu$, kde $\mu$ je $\sigma$-konečná míra na $\mathbb{R}$. Pak funkci $f_X$ splňující $P_X(B) = \int_B f_X d\mu$ pro všechny $B \in \mathbb{B}$ nazveme *hustotou* rozdělení náhodné veličiny $X$ vůči míře $\mu$.

Je třeba si dát pozor na to, aby zvolená referenční míra opravdu byla absolutně spojitá, například při hodu kostkou má výsledek 1 nenulovou pravděpodobnost, ale $\lambda(\{1\}) = 0$.

**Věta 2.7.** *Buď $X$ náhodná veličina a $P_X$ její rozdělení. Je-li $f_X$ hustota (rozdělení) vůči $\sigma$-konečné míře $\mu$, pak*

$$P[X \in B] = \int_B f_X d\mu.$$

*Důkaz.* Jde o přímý důsledek Radonovy-Nikodymovy věty a vztahu mezi $P_X$ a $P$. □

Další funkcí, která plně charakterizuje rozdělení náhodné veličiny je tzv. distribuční funkce.

**Definice 2.8.** Buď $X$ náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $P_X$ její rozdělení. *Distribuční funkce $F_x$* náhodné veličiny $X$ je definována vztahem

$$F_X(a) := P((-\infty, a]) = P[X \leq a].$$

Uvedeme si několik užitečných vlastností distribučních funkcí:

**Důsledek 2.9.** ***(Základní vlastnosti distribučních funkcí)***

*(i) Distribuční funkce jednoznačně určuje rozdělení (jinými slovy, $F_X = F_Y$ implikuje $P_X = P_Y$).*

*(ii) Různé náhodné veličiny mohou mít stejné distribuční funkce, tedy stejné rozdělení.*

*konec 3. přednášky (24.2.2025)*

**Příklad 2.10.** Hodíme dvěma kostkami, označme $Y$ počet sudých čísel na těchto dvou kostkách. Potom $Y \in \{0, 1, 2\}$. Z definice $F_Y(a) = P[Y \leq a]$, tedy

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0, a < 0, \\ \frac{1}{4}, 0 \leq a < 1, \\ \frac{3}{4}, 1 \leq a < 2, \\ 1, a \geq 2. \end{cases}$$

Dále, z toho, že $P_Y(0) = \frac{1}{4} > 0$, plyne, že míra $P_Y$ není absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře $\lambda$, tedy musíme uvažovat čítací míru $\mu_{\mathbb{Z}}$ na množině celých čísel. Potom hustota $f_Y$ má následující tvar:

$$f_Y(a) = \begin{cases} \frac{1}{4}, a = 0, \\ \frac{1}{2}, a = 1, \\ \frac{1}{4}, a = 2, \\ 0, \text{jinak}. \end{cases}$$

Vidíme, že hustota odpovídá skokům distribuční funkce v daném bodě. V následující větě uvedeme charakterizaci distribučních funkcí.

**Věta 2.11.** ***(Charakterizace distribučních funkcí)*** *Buď $X$ náhodná veličina a $F_X$ její distribuční funkce. Pak*

*(i)* *$F_X$ je neklesající;*

*(ii)* $\lim_{a\to-\infty} F_X(a) = 0$, $\lim_{a\to+\infty} F_X(a) = 1$;

*(iii)* *$F_X$ je zprava spojitá.*

*Navíc, každá funkce $F$ splňující body (i)-(iii) z této věty je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny.*

*Důkaz.* Dokážeme pouze implikaci o vlastnostech distribuční funkce, opačná implikace (existuje rozdělení) vyžaduje pokročilý matematický aparát z analýzy a teorie míry, který prozatím postrádáme.

(i) $F_X(a) = P[X \le a]$. Bez újmy na obecnosti nechť $b > a$. Potom $F_X(b) = P[X \le b] = P([X \le a] \cup [a < X \le b]) = P[X \le a] + P[a < X \le b]$ z aditivity míry, druhý sčítanec je nezáporný, tedy dostáváme požadované tvrzení.

(ii) Platí $\lim_{a\to-\infty} = \lim_{n\to\infty} F_X(-n) = \lim_{n\to\infty} P[X \in (-\infty,-n]] =: \lim_{n\to\infty} P[X \in A_n] = 0$. Poslední rovnost platí ze spojitosti míry (v prázdné množině), neboť platí $A_n \swarrow \emptyset$. Obdobně se ukáže tvrzení pro $a \to +\infty$ (cvičení).

(iii) Stačí uvažovat postoupnost $a_n = a + \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Požadované tvrzení opět plyne z věty o spojitosti míry.

□

Pro každou funkci $F$ splňující vlastnosti z předchozí věty existuje míra $\mu_F$ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ určená vztahem $\mu_F((-\infty, a]) = F(a)$ pro všechna $a$. Tato míra je konečná a platí $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(b)$.

**Definice 2.12.** **(Rozklad pravděpodobnostního rozdělení)** Každou pravděpodobnostní míru $P_X$ můžeme rozdělit na tři složky $P_X = P_{X_{as}} + P_{X_{ds}} + P_{X_{sg}}$, kde $P_{X_{as}}$ je absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře $\lambda$, $P_{X_{ds}}$ (diskrétní spojitá) je absolutně spojitá vůči čítací míře $\mu$ na nějaké spočetné podmnožině $\mathbb{R}$ a nakonec $P_{X_{sg}}$ (singulární) není absolutně spojitá vůči $\lambda$ ani ji nelze napsat jako spočetnou kombinaci Diracových měr $\delta_x$.

Příkladem singulární distribuční funkce je například integrál takzvaného Cantorova diskontinua. Obecně taková rozdělení nemají "hezké" vlastnosti, proto s nimi již nebudeme pracovat.

**Definice 2.13.** Náhodnou veličinu $X$ nazveme *diskrétní*, jestliže existují $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$, $\{x_i\}_{i\in I}$ a $\{p_i \in (0,1]\}_{i\in I}$ takové že $P[X \in B] = \sum_{i, x_i \in B} p_i$ pro všechny borelovské $B$.

Platí $P[X = x_i] = p_i$ a $\sum_{i \in I} p_i = 1$. Rozdělením takové veličiny je funkce $P_X = \sum_{i \in I} p_i \delta_{x_i}$, kde $\delta_u$ je Diracova míra v bodě $u$. Toto rozdělení je absolutně spojité vůči čítací míře na $S = \{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$. Potom funkce $f_X(u) := \begin{cases} p_i, u = x_i, \\ 0, \text{jinak} \end{cases}$ je hustotou (občas také pravděpodobnostní funkcí) zkoumaného rozdělení.

**Definice 2.14.** Náhodná veličina $X$ se nazývá *(absolutně) spojitá*, pokud její rozdělení $P_X$ je absolutně spojité vůči Lebesgueově míře $\lambda$.

Pro spojitou náhodnou veličinu $X$ vždy existuje hustota $f_X$ (nezáporná a jednoznačná až na množinu $\lambda$-míry 0) splňující $P[X \in B] = \int_B f_X(t)dt$ a speciálně $F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t)dt$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$. Taková $F_X$ má derivaci ve skoro všech bodech a platí $F_X'(a) = f_X(a)$ pro s.v. $a$. Analogicky pro diskrétní náhodnou veličinu $Y$ je hustota funkcí, která nabývá v bodě $a$ hodnoty distribuční funkce v daném bodě.

Ne každá veličina, se kterou se běžně setkáme je ryze spojitá nebo ryze diskrétní. Příkladem veličiny, která má obě složky nenulové, je například úhrn denních srážek, s nenulovou pravděpodobností nenaprší vůbec, ale když už začne pršet, úhrn srážek je spojitá náhodná veličina.

**Lemma 2.15.** *Nechť $F_X$ je distribuční funkce náhodné veličiny $X$. Pak pro $a < b$ platí*

*(i)* $P[a < X \leq b] = P[X \in (a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$,

*(ii)* $P[X > a] = 1 - F_X(a)$,

*(iii)* $P[X = a] = F_X(a) - F_X(a^-)$, *kde* $F_X(a^-)$ *je limita zleva* $\lim_{h \to 0^+} F_X(a - h)$ *a odtud* $P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a^-)$.

*(iv) pro spojitou náhodnou veličinu platí* $P[a \leq X \leq b] = P[a \leq X < b] = F_X(b) - F_X(a)$.

*Důkaz.* Důkaz je jednoduchý, plyne z příslušných definic. Uvedeme např. důkaz pro bod (iii).

$P[X = a] = \lim_{h \to 0^+} P[a - h < X \leq a] = F_X(a) - \lim_{h \to 0^+} F_X(a - h)$. □

*konec 4. přednášky (25.2.2025)*