

# Pravděpodobnost a matematická statistika (NMSA202)

Petr Velička \*

přednášející: doc. RNDr. Michal Pešta, Ph.D. †

LS 2024/25

---

\*petrvel@matfyz.cz

†pesta@karlin.mff.cuni.cz

# 1 Náhodné jevy

Začneme nejdříve základními definicemi, bez nichž vůbec nemůžeme mluvit o pravděpodobnosti.

**Definice 1.1.** *Výběrovým prostorem* rozumíme množinu  $\Omega$  všech možných výsledků nějakého experimentu. Prvky  $\omega \in \Omega$  této množiny nazýváme *elementárními jevy*. Podmnožině  $A \subset \Omega$  říkáme (*náhodný*) *jev*.

Pro ilustraci uvedeme následující motivační příklad, kde podrobně popíšeme souvislosti s právě zdefinovanými pojmy.

**Příklad 1.2.** Házíme dvakrát férovou mincí. Naším výběrovým prostorem bude množina  $\Omega = \{PP, PO, OP, OO\}$ . Událost, že první hod je panna, je tedy  $A = \{PP, PO\}$ . V tomto zápise písmeno  $P$  odpovídá tomu, že padla panna, kdežto písmeno  $O$  odpovídá orlu.

Dále uvažujme jevy  $H_1$  – při prvním hodu padne panna, a  $H_2$  – při druhém hodu padne panna. Necht jsou všechny výsledky stejně pravděpodobné (jinými slovy, mince je férová), potom pravděpodobnost, že padne alespoň jedna panna (tj. nastane jev  $H_1 \cup H_2$ ) je  $\frac{3}{4}$ .

*Důkaz.* Zřejmě z předchozího máme  $H_1 = \{PP, PO\}$  a  $H_2 = \{OP, PP\}$ . Pravděpodobnost spočteme jako podíl velikosti  $|H_1 \cup H_2| = 3$  a velikosti celého prostoru  $|\Omega| = 4$ .  $\square$

Tato jednoduchá intuice však selže v případě nekonečné (nespočetné) množiny  $\Omega$ , neboť jak již čtenář jistě ví z přednášky základů teorie míry, na nespočetné množině neexistuje “rozumný” způsob, jak měřit množiny. Musíme proto pracovat pouze s jistou třídou podmnožin  $\Omega$ , které budeme říkat  $\sigma$ -algebra.

**Definice 1.3.** Necht  $\Omega \neq \emptyset$  je množina a  $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$  soubor jejích podmnožin. Této množině  $\mathcal{A}$  říkáme  $\sigma$ -algebra, jestliže jsou splněny následující podmínky:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,
- (ii) Pokud  $A \in \mathcal{A}$ , pak  $A^C := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ ,
- (iii) Pokud  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ , pak  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

Dvojici  $(\Omega, \mathcal{A})$  nazýváme *měřitelný prostor*.

Každé události  $A \in \mathcal{A}$  přiřadíme číslo  $\mathbb{P}(A)$ , které nazýváme *pravděpodobnost* jevu  $A$ . Jelikož chceme, aby se zachovala intuice z předchozího příkladu, musíme tuto představu náležitým způsobem formalizovat.

**Definice 1.4.** Necht  $(\Omega, \mathcal{A})$  je měřitelný prostor. Zobrazení  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  nazýváme *pravděpodobnostní mírou* (*pravděpodobností*), jestliže:

- (i)  $P(\Omega) = 1$ ,
- (ii) Pro libovolné po dvou disjunktní měřitelné množiny  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  platí  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ .

Trojici  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  nazýváme *pravděpodobnostní prostor*.

Přímo z této definice již můžeme odvodit pár základních vlastností pravděpodobnosti, se kterými dále budeme pracovat. Ve všech následujících tvrzeních pracujeme s pravděpodobnostním prostorem  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

**Pozorování 1.5. (Základní vlastnosti pravděpodobnostní míry)** Pro výše jmenovaný pravděpodobnostní prostor platí následující tvrzení:

1.  $P(\emptyset) = 0$ ,
2. Pro  $A, B \in \mathcal{A}$  disjunktní platí  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
3. Pro  $A \in \mathcal{A}$  platí  $P(A^C) = 1 - P(A)$ ,
4. Pro  $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$  platí  $P(A) \leq P(B)$ .

*Důkaz.* 1. Uvažujme posloupnost  $A_1 = \Omega, A_2 = A_3 = \dots = \emptyset$ . Potom z vlastnosti (ii) z definice máme, že  $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \dots) = P(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset)$ . Tedy  $\sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$ , což může nastat pouze v případě  $P(\emptyset) = 0$  (jde o součet nekonečně mnoha nezáporných čísel).

2. Necht  $A_1 = A, A_2 = B, A_i = \emptyset$  pro  $i > 2$ . Tvrzení plyne přímo z vlastnosti (ii) z definice pravděpodobnostní míry a již dokázané vlastnosti 1.
3.  $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$ . Tato rovnost platí, neboť množina je vždy disjunktní se svým komplementem.
4.  $P(B) = P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$ . Jelikož funkce  $P$  je nezáporná, snadno vidíme, že  $P(B) \geq P(A)$ .

□

**Lemma 1.6. (Pravděpodobnost sjednocení)** Pro libovolné  $A, B \in \mathcal{A}$  platí  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

*Důkaz.* Rozepíšeme  $A \cup B = (A \cap B^C) \cup (A \cap B) \cup (A^C \cap B)$ . Tyto tři množiny jsou zřejmě po dvou disjunktní. Dále díky aditivitě pravděpodobnosti máme  $P(A \cup B) = P(A \cap B^C) + P(A \cap B) + P(A^C \cap B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ . □

**Věta 1.7. (Spojitost pravděpodobnosti)** Buď  $A_n \uparrow A$  nebo  $A_n \downarrow A$  pro  $A_n, A \in \mathcal{A}$ . Potom platí  $P(A_n) \rightarrow P(A)$ .

*Důkaz.* Necht  $A_n \uparrow A$ . Potom z definice  $A_1 \subset A_2 \dots$  a platí  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Definujme posloupnost  $B_n$ :  $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ . Potom  $B_i$  jsou po dvou disjunktní a platí  $A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$ . Zřejmě také platí  $A \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ . Pak  $P(A_n) = P(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i)$ . Z toho již můžeme odvodit  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = P(A)$ .

Případ klesající  $A_n$  se dokáže analogicky, stačí uvažovat  $C_n = A_n^C$ . □

konec 1. přednášky (17.2.2025)

Uvedeme si ještě jeden příklad ilustrující intuitivní chápání pravděpodobnosti a zavedeme první takzvané pravděpodobnostní rozdělení. Uvažujme případ, že prostor  $\Omega$  je konečný. Necht všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné, pak platí

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

V tomto případě mluvíme o *rovnoměrném rozdělení pravděpodobnosti*.

**Příklad 1.8.** (*Hod dvěma kostkami*) Výběrový prostor  $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1 \dots 6\}\}$  má 36 prvků. Jestliže všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné, pak platí  $P(A) = \frac{|A|}{36}$ . Například, pravděpodobnost toho, že součet na kostkách je přesně 11, je  $2/36$ , protože pouze dva výsledky  $(5, 6)$  a  $(6, 5)$  odpovídají této události.

V praxi často chceme odlišit, zda pravděpodobnost výskytu jedné události nějakým způsobem závisí na výskytu jiné události. K tomu nám poslouží pojem nezávislosti jevů.

**Definice 1.9.** Dvě události  $A, B \in \mathcal{A}$  jsou *nezávislé*, jestliže platí  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Obdobně, množina událostí  $\{A_i : i \in I\}$  (kde indexová množina  $I$  je nejvýše spočetná) je *nezávislá*, jestliže platí

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

pro každou konečnou podmnožinu  $J \subset I$ .

Je důležité si uvědomit, že disjunktní události s kladnou pravděpodobností nejsou nezávislé (neboť součin jejich pravděpodobností není roven 0 – pravděpodobnost výskytu jejich prázdného průniku). Obecně se pracuje se dvěma typy nezávislosti – předpokládanou (plyne z podstaty zkoumané úlohy) a odvozenou (dokázaná pomocí jiných vlastností úlohy). Následující příklad ilustruje praktické použití právě zavedeného pojmu.

**Příklad 1.10.** Házíme fěrovou mincí 10krát. Necht  $A$  je událost “padla aspoň jedna panna”. Pak platí  $P(A) = 1 - (1/2)^{10}$ .

*Důkaz.* Necht  $T_j$  je událost, že při  $j$ -tém hodu padne orel. Můžeme psát  $P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - P(\text{samé orly}) = 1 - P(T_1 \cap \dots \cap T_{10})$ . Dále díky nezávislosti (v tomto případě jde o nezávislost předpokládanou) jevů  $T_j$  máme  $1 - P(T_1 \cap \dots \cap T_{10}) = 1 - P(T_1) \cdot \dots \cdot P(T_{10}) = 1 - (1/2)^{10} \approx 0.999$ .  $\square$

Dalším silným nástrojem v teorii pravděpodobnosti je podmíněná pravděpodobnost, která nám poskytuje odpověď na otázku “Pokud vím, že nastala událost  $B$ , jaká je pravděpodobnost události  $A$ ?”.

**Definice 1.11.** Mějme jevy  $A, B \in \mathcal{A}$ . Pokud  $P(B) > 0$ , pak *podmíněná pravděpodobnost*  $A$  za podmínky  $B$  je definována vztahem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Poznamenejme si několik základních vlastností podmíněné pravděpodobnosti, jejichž důkaz snadno plyne z příslušných definic.

**Pozorování 1.12. (Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti)**

- (i) Pro pevné  $B \in \mathcal{A}, P(B) > 0$  je  $P(\cdot|B)$  pravděpodobnostní míra.
- (ii) Obecně platí  $P(A|B) \neq P(B|A)$ , platí totiž  $P(A|B) = P(B|A) \frac{P(A)}{P(B)}$  (pokud obě strany rovnosti dávají smysl).
- (iii) Události  $A$  a  $B$  jsou nezávislé právě tehdy, když  $P(A|B) = P(A)$  (předpokládáme nenulovost  $P(B)$ ).
- (iv)  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$  v případě, že  $P(A)P(B) > 0$ .

*Důkaz.* Vlastnosti (iii) a (iv) plynou přímo z definice vynásobením vhodnou konstantou.

Vlastnost (ii) se dokáže následujícím protipříkladem, uvažujme hod dvěma férovými mincemi. Nechť  $H_1$  je událost “padla aspoň jedna panna” a  $H_2$  událost “padly dvě panny”. Potom  $P(H_1|H_2) = 1$  ale  $P(H_2|H_1) = \frac{1}{3}$ . Důkaz obecného vztahu je ponechán čtenáři jako snadné (ale užitečné) cvičení.

Nakonec, vlastnost (i) je důsledkem toho, že pro libovolnou množinu  $A \in \mathcal{A}$  je  $A \cap B$  měřitelná, a navíc pro libovolný systém po dvou disjunktních množin  $A_i, i \in \mathbb{N}$  platí  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \frac{1}{P(B)} P((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B) = \frac{1}{P(B)} P(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)) = \frac{1}{P(B)} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$ .  $\square$

Použití podmíněné pravděpodobnosti v praxi však někdy může vést k neintuitivním výsledkům, které ilustruje následující příklad.

**Příklad 1.13.** Uvažujme nemoc  $D$  a test, který má dva možné výsledky. Pravděpodobnosti výsledků tohoto testu jsou uvedeny v následující tabulce. Zde sloupce odpovídají přítomnosti/absenci nemoci a řádky výsledkům testu.

	$D$	$D^C$
+	0.009	0.099
−	0.001	0.891

Z definice spočteme následující podmíněné pravděpodobnosti:

$$P(+|D) = \frac{P(+ \cap D)}{P(D)} = \frac{0.009}{0.009 + 0.001} = 0.9.$$

$$P(-|D^C) = \frac{P(- \cap D^C)}{P(D^C)} = \frac{0.891}{0.891 + 0.099} \approx 0.9.$$

Vychází nám, že test je docela přesný, neboť nemocní lidé mají test v 90% případů pozitivní, stejně tak zdraví lidé jsou v 90% případů negativní.

Dále předpokládejme, že pacient šel na test a získal pozitivní výsledek. Spočteme, s jakou pravděpodobností je opravdu nakažený.

$$P(D|+) = \frac{P(D \cap +)}{P(+)} = \frac{0.009}{0.009 + 0.099} \approx 0.08.$$

Vyšlo nám, že na první pohled zdánlivě precizní test ve skutečnosti má méně než 10% úspěšnost. Jedním z důvodů této diskrepance může být například velký nepoměr zdravých lidí vůči nakaženým (pouze jedno procento) ve zdrojových datech, což je jev který se obecně vyskytuje u většiny nemocí. V praxi se proto často pracuje s domněnkami – například testujeme jen pacienty, kteří vykazují nějaké symptomy apod.

Na závěr uvedeme dvě velmi užitečné věty, které se často používají v nejrůznějších úlohách a týkají se podmíněné pravděpodobnosti. Zformulujeme je pro spočetné rozklady, ale obdobná tvrzení platí i pro konečné rozklady s velmi podobným důkazem.

**Věta 1.14. (Zákon úplné pravděpodobnosti)** *Nechť  $A_1, A_2, \dots$  je spočetný disjunkttní rozklad  $\Omega$  takový, že  $P(A_i) > 0$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Potom pro libovolnou událost  $B \in \mathcal{A}$  platí:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i).$$

*Důkaz.* Definujme posloupnost množin  $C_i = B \cap A_i$  pro  $i \in \mathbb{N}$ . Zjevně  $\{C_i, i \in \mathbb{N}\}$  je disjunkttní pokrytí  $B$ . Potom  $P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)$ .  $\square$

**Věta 1.15. (Bayes)** *Nechť  $A_1, A_2, \dots$  je spočetný disjunkttní rozklad  $\Omega$  takový, že  $P(A_i) > 0$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Mějme událost  $B \in \mathcal{A}$  s nenulovou pravděpodobností. Potom platí:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

*Důkaz.* Příímým výpočtem dostáváme

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)},$$

kde poslední rovnost získáme aplikací Věty 1.14.  $\square$

Použití Bayesovy věty si ukážeme na následujícím příkladu.

**Příklad 1.16.** Uvažujme e-mailovou schránku. Máme tři kategorie e-mailů:  $A_1$  – spam,  $A_2$  – nízká priorita,  $A_3$  – vysoká priorita. Na základě předchozích zkušeností víme, že  $P(A_1) = 0.7$ ,  $P(A_2) = 0.2$ ,  $P(A_3) = 0.1$ . Nechť  $B$  je událost, že daný e-mail obsahuje slovo “zdarma”. Platí  $P(B|A_1) = 0.9$ ,  $P(B|A_2) =$

$0.01$ ,  $P(B|A_3) = 0.01^1$ . Jaká je pravděpodobnost, že příchozí e-mail obsahující slovo “zdarma” je spam?

Přímým výpočtem z Bayesovy věty získáme

$$P(A_1|B) = \frac{0.9 \cdot 0.7}{0.9 \cdot 0.7 + 0.01 \cdot 0.2 + 0.01 \cdot 0.1} = 0.995.$$

Tedy pravděpodobnost, že tento e-mail je spam je přes 99%!

**Věta 1.17. (*O postupném podmiňování*)** *Nechť  $\{A_i\}_{i=1}^n$  jsou náhodné jevy takové, že  $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) > 0$ . Pak platí*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1).$$

*Důkaz.* Dokazujeme indukcí podle počtu náhodných jevů. Z definice podmíněné pravděpodobnosti víme, že  $P(A_2 \cap A_1) = P(A_2|A_1)P(A_1)$ . Dále

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(A_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) = P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right),$$

čímž je důkaz ukončen. □

---

<sup>1</sup>Tyto hodnoty se nutně nemusí sečíst na 1

## 2 Náhodné veličiny

V této kapitole se budeme věnovat náhodným veličinám, což bude formalizovat (a zobecňovat) jakýsi intuitivní chápání toho, že nějaká proměnná nabývá různých hodnot s určitými pravděpodobnostmi. Začneme ústřední definicí celé statistiky – náhodnou veličinou.

**Definice 2.1.** Necht  $(\Omega, \mathcal{A})$  je měřitelný prostor. *Náhodná veličina* je měřitelné zobrazení, které přiřazuje každému výsledku  $\omega$  reálné číslo  $X(\omega)$ . Jinými slovy,  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \forall x \in \mathbb{R}$ .

*konec 2. přednášky (18.2.2025)*

**Úmluva 2.2.** Zavedeme značení  $[X \in B] = \{\omega : X(\omega) \in B\}, [X \leq a] = \{\omega, X(\omega) \leq a\}$ . Platí tedy  $[X \in B], [X \leq a] \in \mathcal{A}$  pro všechna  $B \in \mathcal{B}, a \in \mathbb{R}$ . Jde o náhodné jevy a jsou tedy dobře definované jejich pravděpodobnosti  $P[X \in B], P[X \leq a]$ .

**Příklad 2.3.** Házíme mincí desetkrát. Necht  $X(\omega)$  je počet orlů v posloupnosti  $\omega$ . Jestliže  $\omega = O O P O O P O O P P$  (kde  $O$  je orel a  $P$  je panna), platí  $X(\omega) = 6$ .

V předchozí kapitole jsme mluvili o pravděpodobnostním rozdělení, je na čase tento pojem formálně zdefinovat.

**Definice 2.4.** *Rozdělením náhodné veličiny*  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  nazýváme indukovanou pravděpodobnostní míru  $P_X$  na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  definovanou jako

$$P_X(B) := P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Máme tedy jakýsi obraz míry  $P$  v zobrazení  $P_X$  čímž se  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  zobrazí na pravděpodobnostní prostor  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ . V opačném směru můžeme použít takzvané kanonické vnoření do prostoru  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ , kde naší zvolenou měřitelnou funkcí bude identita, tedy není potřeba se bát, že by příslušný prostor nemusel existovat. Následující věta říká, že nezáleží ve kterém z těchto dvou prostorů integrujeme libovolnou funkci.

**Věta 2.5. (*O přenosu integrace*)** *Bud  $g$  měřitelná funkce na měřitelném prostoru  $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$  a  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{M}, \mathcal{M})$ . Necht  $P_X$  je míra na  $\mathcal{M}$  indukovaná zobrazením  $X$ , tedy  $P_X(M) = P[X^{-1}(M)]$  pro  $M \in \mathcal{M}$ . Potom, je-li aspoň jedna strana definována, platí*

$$\int_{\Omega} g[X(\omega)] dP(\omega) = \int_{\mathbb{M}} g(x) dP_X(x).$$

*Důkaz.* Důkaz této věty je poměrně technický, hlavní ideou je “klasický” postup z teorie míry postupným důkazem nejdříve pro charakteristickou funkci, poté pro jednoduchou měřitelnou (nabývající jen konečně mnoha hodnot), pak pro nezápornou měřitelnou a na závěr pro obecnou měřitelnou funkci.



Nechť  $g = \chi_B, B \in \mathcal{M}$ . Tedy  $g(X(\omega)) = 1$  pro  $X(\omega) \in B$  (a všude jinde nulová), tedy pro  $\omega \in X^{-1}(B)$ . Potom máme

$$\int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{X^{-1}(B)} dP(\omega) = P[X^{-1}(B)].$$

Pro pravou stranu máme

$$\int_{\mathbb{M}} g(x) dP_X(x) = \int_B dP_X(x) = P_X(B) = P[X^{-1}(B)].$$

Dále necht  $g$  je jednoduchá měřitelná, tedy  $g(\cdot) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{B_k}(\cdot)$  pro  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_k \in \mathbb{R}$  a  $B_k \in \mathcal{M}$  pro všechna  $k$ . Z linearity integrálu plyne (vytkneme sumu)  $\int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{X^{-1}(B)} dP(\omega) = P[X^{-1}(B)]$ .

Je-li  $g$  nezáporná měřitelná, potom existuje posloupnost  $g_n$  jednoduchých měřitelných funkcí takových, že  $g_n \nearrow g$ . Potom dle Léviho věty o monotonní konvergenci máme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g[X(\omega)] dP(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n[X(\omega)] dP(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{M}} g_n(x) dP_X(x) = \int_{\mathbb{M}} g(x) dP_X(x), \end{aligned}$$

kde třetí rovnost plyne z již dokázané části pro jednoduché měřitelné funkce.

Nakonec, pro  $g$  měřitelnou existuje rozklad  $g = g^+ - g^-$  takový, že  $g^+, g^-$  jsou nezáporné měřitelné, tedy požadované tvrzení plyne z části pro nezáporné měřitelné funkce.  $\square$

Na závěr poznamenejme, že se nám budou obzvlášť hodit volby  $(\mathbb{M}, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  pro  $n \geq 1$ .

Připomeňme si, že jsou-li  $\mu, \nu$  dvě  $\sigma$ -konečné míry na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  a je-li  $\nu \ll \mu$  (tedy  $\mu(B) = 0$  implikuje  $\nu(B) = 0$ ), potom z Radonovy-Nikodymovy věty plyne existence nezáporné měřitelné funkce  $f$  takové, že  $\nu(B) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu$  pro všechna  $B \in \mathcal{B}$ . Této funkci  $f$  říkáme Radonova-Nikodymova derivace a píšeme  $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ . Taková funkce  $f$  je navíc určena jednoznačně až na množinu  $\mu$ -míry 0.

Využijeme těchto poznatků tak, že zvolíme vhodnou referenční míru na  $\mathbb{R}$  a rozdělení  $P_X$  pak bude popsáno právě zavedenou Radonovou-Nikodymovou derivací. Vhodné referenční míry jsou např.

- Lebesgueova míra  $\lambda$ ,
- Čítačí míra na spočetné podmnožině  $\mathbb{R}$ , platí  $\mu_S(B) = |B \cap S|$  kde  $S$  je nejvýše spočetná podmnožina  $\mathbb{R}$ .

**Definice 2.6.** Buď  $X$  náhodná veličina a  $P_X$  její rozdělení. Necht  $P_X$  je absolutně spojitě vůči  $\mu$ , kde  $\mu$  je  $\sigma$ -konečná míra na  $\mathbb{R}$ . Pak funkci  $f_X$  splňující  $P_X(B) = \int_B f_X d\mu$  pro všechny  $B \in \mathcal{B}$  nazveme *hustotou* rozdělení náhodné veličiny  $X$  vůči míře  $\mu$ .

Je třeba si dát pozor na to, aby zvolená referenční míra opravdu byla absolutně spojitá, například při hodu kostkou má výsledek 1 nenulovou pravděpodobnost, ale  $\lambda(\{1\}) = 0$ .

**Věta 2.7.** *Buď  $X$  náhodná veličina a  $P_X$  její rozdělení. Je-li  $f_X$  hustota (rozdělení) vůči  $\sigma$ -konečné míře  $\mu$ , pak*

$$P[X \in B] = \int_B f_X d\mu.$$

*Důkaz.* Přímý důsledek Radonovy-Nikodymovy věty a vztahu mezi  $P_X$  a  $P$ .  $\square$

Další funkcí, která plně charakterizuje rozdělení náhodné veličiny je tzv. distribuční funkce.

**Definice 2.8.** Buď  $X$  náhodná veličina na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  a  $P_X$  její rozdělení. *Distribuční funkce  $F_x$  náhodné veličiny  $X$  je definována  $F_X(a) = P((-\infty, a]) = P[X \leq a]$ .*

Uvedeme si několik užitečných vlastností distribučních funkcí:

**Důsledek 2.9. (Základní vlastnosti distribučních funkcí)**

- (i) *Distribuční funkce jednoznačně určuje rozdělení (jinými slovy,  $F_X = F_Y$  implikuje  $P_X = P_Y$ ).*
- (ii) *Různé náhodné veličiny mohou mít stejné distribuční funkce, tedy stejné rozdělení.*

*konec 3. přednášky (24.2.2025)*

**Příklad 2.10.** Hodíme dvěma kostkami, označme  $Y$  počet sudých čísel na těchto dvou kostkách. Potom  $Y \in \{0, 1, 2\}$ . Z definice  $F_Y(a) = P[Y \leq a]$ , tedy

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq a < 1, \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq a < 2, \\ 1, & a \geq 2. \end{cases}$$

Dále, z toho, že  $P_Y(0) = \frac{1}{4} > 0$ , plyne, že míra  $P_Y$  není absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře  $\lambda$ , tedy musíme uvažovat čítací míru  $\mu_{\mathbb{Z}}$  na množině celých čísel. Potom hustota  $f_Y$  má následující tvar:

$$f_Y(a) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & a = 0, \\ \frac{1}{2}, & a = 1, \\ \frac{1}{4}, & a = 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vidíme, že hustota odpovídá skokům distribuční funkce v daném bodě. V následující větě uvedeme charakterizaci distribučních funkcí.

**Věta 2.11. (Charakterizace distribučních funkcí)** Buď  $X$  náhodná veličina a  $F_X$  její distribuční funkce. Pak

- (i)  $F_X$  je neklesající;
- (ii)  $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = 0$ ,  $\lim_{a \rightarrow +\infty} F_X(a) = 1$ ;
- (iii)  $F_X$  je zprava spojitá.

Navíc, každá funkce  $F$  splňující body (i)-(iii) z této věty je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny.

*Důkaz.* Dokážeme pouze implikaci o vlastnostech distribuční funkce, opačná implikace (existuje rozdělení) vyžaduje pokročilý matematický aparát z analýzy a teorie míry, který prozatím postrádáme.

- (i)  $F_X(a) = P[X \leq a]$ . Bez újmy na obecnosti nechť  $b > a$ . Potom  $F_X(b) = P[X \leq b] = P([X \leq a] \cup [a < X \leq b]) = P[X \leq a] + P[a < X \leq b]$  z aditivity míry, druhý sčítanec je nezáporný, tedy dostáváme požadované tvrzení.
- (ii) Platí  $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X \in (-\infty, -n]] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X \in A_n] = 0$ . Poslední rovnost platí ze spojitosti míry (v prázdné množině), neboť platí  $A_n \searrow \emptyset$ . Obdobně se ukáže tvrzení pro  $a \rightarrow +\infty$  (cvičení).
- (iii) Stačí uvažovat postoupnost  $a_n = a + \frac{1}{n}$  pro  $n \in \mathbb{N}$ . Požadované tvrzení opět plyne z věty o spojitosti míry.

□

Pro každou funkci  $F$  splňující vlastnosti z předchozí věty existuje míra  $\mu_F$  na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  určená vztahem  $\mu_F((-\infty, a]) = F(a)$  pro všechna  $a$ . Tato míra je konečná a platí  $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ .

**Definice 2.12. (Rozklad pravděpodobnostního rozdělení)** Každou pravděpodobnostní míru  $P_X$  můžeme rozdělit na tři složky  $P_X = P_{X_{as}} + P_{X_{ds}} + P_{X_{sg}}$ , kde  $P_{X_{as}}$  je absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře  $\lambda$ ,  $P_{X_{ds}}$  (diskrétní spojitá) je absolutně spojitá vůči číselní míře  $\mu$  na nějaké spočetné podmnožině  $\mathbb{R}$  a nakonec  $P_{X_{sg}}$  (singulární) není absolutně spojitá vůči  $\lambda$  ani ji nelze napsat jako spočetnou kombinaci Diracových měr  $\delta_x$ .

Příkladem singulární distribuční funkce je například integrál takzvaného Cantorova diskontinua. Obecně taková rozdělení nemají “hezké” vlastnosti, proto s nimi již nebudeme pracovat.

**Definice 2.13.** Náhodnou veličinu  $X$  nazveme *diskrétní*, jestliže existují  $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$ ,  $\{x_i\}_{i \in I}$  a  $\{p_i \in (0, 1]\}_{i \in I}$  takové že  $P[X \in B] = \sum_{i, x_i \in B} p_i$  pro všechny borelovské  $B$ .

Platí  $P[X = x_i] = p_i$  a  $\sum_{i \in I} p_i = 1$ . Rozdělením takové veličiny je funkce  $P_X = \sum_{i \in I} p_i \delta_{x_i}$ , kde  $\delta_u$  je Diracova míra v bodě  $u$ . Toto rozdělení je spojitě vůči číselní míře na  $S = \{x_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$ . Potom funkce  $f_X(u) := \begin{cases} p_i, u = x_i, \\ 0, \text{jinak} \end{cases}$  je hustotou (občas také pravděpodobnostní funkcí) zkoumaného rozdělení.

**Definice 2.14.** Náhodná veličina  $X$  se nazývá (*absolutně*) *spojitá*, pokud její rozdělení  $P_X$  je absolutně spojitě vůči Lebesgueově míře  $\lambda$ .

Pro spojitou náhodnou veličinu  $X$  vždy existuje hustota  $f_X$  (nezáporná a jednoznačná až na množinu  $\lambda$ -míry 0) splňující  $P[X \in B] = \int_B f_X(t) dt$  a speciálně  $F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(t) dt$  pro všechna  $a \in \mathbb{R}$ . Taková  $F_X$  má derivaci ve skoro všech bodech a platí  $F'_X(a) = f_X(a)$  pro s.v.  $a$ . Analogicky pro diskrétní náhodnou veličinu  $Y$  je hustota funkcí, která nabývá v bodě  $a$  hodnotu distribuční funkce v daném bodě.

Ne každá veličina, se kterou se běžně setkáme je ryze spojitá nebo ryze diskrétní. Příkladem veličiny, která má obě složky nenulové, je například úhrn denních srážek, s nenulovou pravděpodobností nenaprší vůbec, ale když už začne pršet, úhrn srážek je spojitá náhodná veličina.

**Lemma 2.15.** *Nechť  $F_X$  je distribuční funkce náhodné veličiny  $X$ . Pak pro  $a < b$  platí*

$$(i) \quad P[a < X \leq b] = P[X \in (a, b]] = F_X(b) - F_X(a),$$

$$(ii) \quad P[X > a] = 1 - F_X(a),$$

$$(iii) \quad P[X = a] = F_X(a) - F_X(a^-), \text{ kde } F_X(a^-) \text{ je limita zleva } \lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(a - h) \text{ a odtud } P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a^-).$$

$$(iv) \quad \text{pro spojitou náhodnou veličinu platí } P[a \leq X \leq b] = P[a \leq X < b] = F_X(b) - F_X(a).$$

*Důkaz.* Důkaz je jednoduchý, plyne z příslušných definic. Uvedeme např. důkaz pro bod (iii).

$$P[X = a] = \lim_{h \rightarrow 0^+} P[a - h < X \leq a] = F_X(a) - \lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(a - h). \quad \square$$

*konec 4. přednášky (25.2.2025)*